

Florian Ettliger, \*1993

Schule:  
Technische Universität,  
München

Eingang der Arbeit:  
Juni 2013

Zur Veröffentlichung angenommen:  
Oktober 2013

## Segeln mit der Litfaßsäule

### Die ideale Rotationsgeschwindigkeit für den Flettner-Rotor

Flettner-Rotoren sind alternative Schiffsantriebe, bei denen durch rotierende, aufrecht stehende Zylinder eine Vortriebskraft erzeugt wird. In dieser Arbeit wird untersucht, bei welcher möglichst geringen Rotationsgeschwindigkeit eine möglichst hohe Vortriebskraft entsteht. Dieses ist der Fall, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders auf die vierfache Anströmungsgeschwindigkeit eingestellt wird.

#### 1 Einleitung

Auf einen rotierenden Zylinder in einer Strömung wirkt eine Querkraft. Dieses, gemeinhin als Magnus-Effekt bezeichnetes, Phänomen nutzte Anton Flettner zum Antrieb von Schiffen aus. Er ersetzte die Segel eines Segelschiffes durch aufrecht stehende, rotierende Zylinder [6]. Diese Flettner-Rotoren bieten den Vorteil, dass die Vortriebskraft sehr viel größer werden kann, als die eines konventionellen Segels. Andererseits müssen die Rotoren unter Energieaufwand angetrieben werden. In dieser Arbeit soll daher untersucht werden, bei welcher möglichst geringen Rotationsgeschwindigkeit eine möglichst hohe Vortriebskraft entsteht. Hierzu werden zunächst theoretische Überlegungen angestellt und diese dann experimentell überprüft. Auch ist es hierzu nötig, sich auf Teilchenebene genauer mit den Ursachen des Magnus-Effekts auseinanderzusetzen.

#### 2 Theoretische Behandlung des Problems der maximalen Querkraft

##### 2.1 Berechnung mit der Theorie der Potentialströmungen

Um Strömungen mit relativ einfachen mathematischen Mitteln beschreiben zu können, führt man ein so genanntes ideales Fluid ein, das inkompressibel und frei von Reibung ist [1]. In guter Näherung verhalten sich reale Fluide in großen Teilen der Strömung ideal, lediglich in der Nähe von Wänden müssen später Reibungskräfte mitbetrachtet werden. Als weitere Vereinfachung genügt es zudem, die Strömung um einen langgestreckten Zylinder als zweidimensionales Problem zu behandeln.

Die Strömung eines idealen Fluids werde durch ein Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{r}) = (v_x, v_y)^\top$ ,  $\vec{r} = (x, y)^\top$  beschrieben. Ein ideales Fluid ist rotationsfrei, also  $\text{rot}\vec{v} = \partial_x v_y - \partial_y v_x = 0$  denn bei Abwesenheit von Reibung können keine Fluid-Teilchen in Drehung versetzt wer-

den, also kann formal mit einer skalaren Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein Potential definiert werden, so dass gilt:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \nabla\Phi(\vec{r}), v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (1)$$

In der Strömung eines idealen Fluids (mit der Dichte  $\rho$  und der Stromdichte  $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$  ist an jedem Ort die Kontinuitätsgleichung [2] erfüllt:

$$\rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (2)$$

Für eine quellfreie Strömung, wie die Umströmung eines Zylinders, gilt also:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Unter Verwendung der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge (Satz von Schwarz [3]) kann man zeigen, dass (3) noch von einer weiteren Funktion  $\Psi$  erfüllt wird:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (5)$$

Durch Vergleich mit (3) erhält man dann:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6)$$

Offensichtlich erfüllen  $\Phi$  und  $\Psi$  also die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen [3]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7)$$

Die beiden Funktionen können also zu einer holomorphen Funktion  $\chi(z)$  mit  $z = x + iy$  zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y) \\ &=: \Phi(z) + i \cdot \Psi(z) \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei wird üblicherweise  $\chi$  als komplexes Potential,  $\Phi$  als Potentialfunktion und  $\Psi$  als Stromfunktion bezeichnet. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass mit den Niveaulinien von  $\Psi$ , auch Stromlinien genannt, eine Strömung graphisch anschaulich dargestellt werden kann.

Nun können im nächsten Schritt einige benötigte elementare Strömungen gefunden werden. Eine Parallelströmung mit im gesamten Strömungsfeld konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  lässt sich mit

$$\chi = v_0 \cdot z \quad (9)$$

darstellen. In den zur Veranschaulichung verwendeten Graphiken (siehe z. B. Abb. 1) sind jeweils die Stromlinien dargestellt.

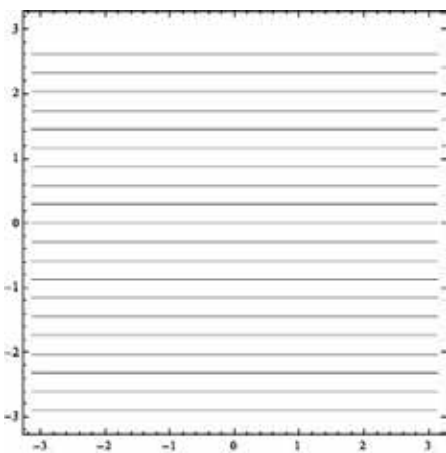


Abb. 1: Beispiel einer Parallelströmung.

Die Umströmung eines Zylinders ist insgesamt quellenfrei, jedoch werden im Anschluss zur Darstellung eines Dipols

zunächst auch die Quellen- und Senkenströmung benötigt. Zur Vereinfachung werden Polarkoordinaten verwendet. Mit  $K(r)$  werde eine Kugel um den Ursprung mit Radius  $r$  bezeichnet. Es sitze eine punktförmige Quelle im Ursprung. Der Integralsatz von Gauss [3] liefert dann:

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \vec{v} d\vec{\sigma} &= \int_K \nabla \cdot \vec{v} dV \\ 2\pi \cdot r \cdot v &= E \end{aligned} \quad (10)$$

$$v = \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (11)$$

Die Bezeichnung der rechten Seite mit  $E$  ist zunächst willkürlich und ein Maß für die Stärke der Quelle. Wichtig ist, dass die Strömungsgeschwindigkeit bei Entfernung von der Quelle mit  $1/r$  abfällt. Eine Stammfunktion zu  $1/r$  ist  $\ln(r)$ . Man kann daher zur Darstellung einer Quelle (siehe Abb. 2), beziehungsweise mit umgekehrtem Vorzeichen auch einer Senke, die Funktion

$$\chi = \frac{E}{2\pi} \ln(z) \quad (12)$$

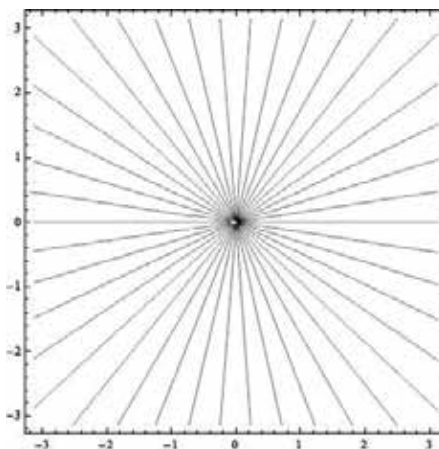


Abb. 2: Beispiel einer Quelle oder Senke.

verwenden. Bei einer Kreisströmung sind Strom- und Äquipotentiallinien gegenüber der Quellenströmung vertauscht. Mit der Wirbelstärke  $\Gamma$  kann man also verwenden:

$$\chi = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) \quad (13)$$

Interessant ist besonders, dass auch diese Strömungsform rotationsfrei ist. Anschaulich kann man sich das dadurch klarmachen, dass hier einzelne Fluidteilchen sich zwar im Kreis bewegen (siehe Abb. 3), dabei aber nicht um sich

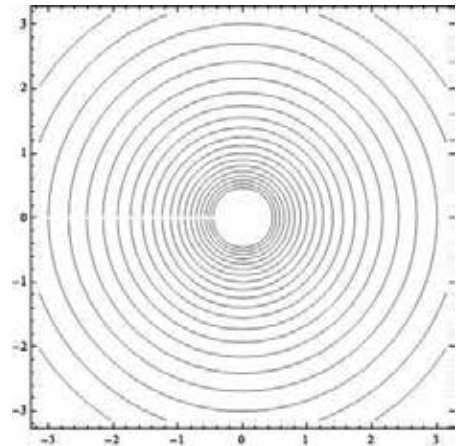


Abb. 3: Beispiel einer Kreisströmung.

selbst rotieren. Zuletzt werden für einen Dipol eine Quelle und eine Senke (an den Orten  $+a$  und  $-a$ ) kombiniert:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{E}{2\pi} \ln(z+a) - \frac{E}{2\pi} \ln(z-a) \\ &= \frac{E}{2\pi} \ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Wenn nun der Abstand zwischen Quelle und Senke sehr klein wird, löschen sich beide gegenseitig aus, nicht aber, wenn gleichzeitig die Quellenstärke sehr groß wird. Unter der Voraussetzung, dass das Dipolmoment  $M := 2 \cdot E \cdot a$  erhalten bleibt, ergibt sich für  $a \rightarrow 0$  folgender Grenzwert:

$$\chi = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} \quad (15)$$

Dieses kann man sich auch an der Taylor-Entwicklung des komplexen Potentials klarmachen:

$$\chi = \frac{E}{2\pi} \cdot \left( \frac{2a}{z} + \frac{2a^3}{z^3} + \frac{2a^5}{z^5} + O(z^6) \right) \quad (16)$$

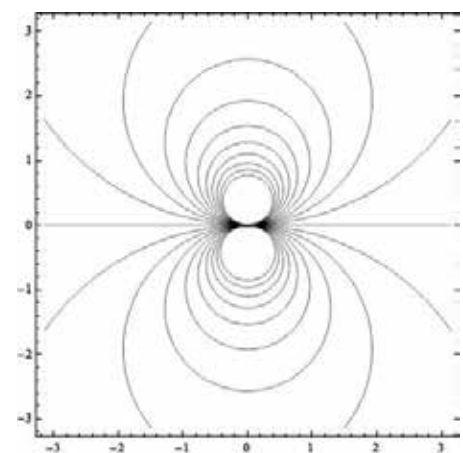


Abb. 4: Beispiel eines Dipols.

Wenn man nun eine Parallelströmung mit einem Dipol (siehe Abb. 4 Seite 17) kombiniert, so erhält man interessanterweise eine kreisförmige Stromlinie mit dem Radius  $R = \sqrt{M \cdot (2\pi \cdot v)^{-1}}$  um den Ursprung (siehe Abb. 5).

$$\chi = v_0 \cdot z + \frac{M}{2\pi z} \quad (17)$$

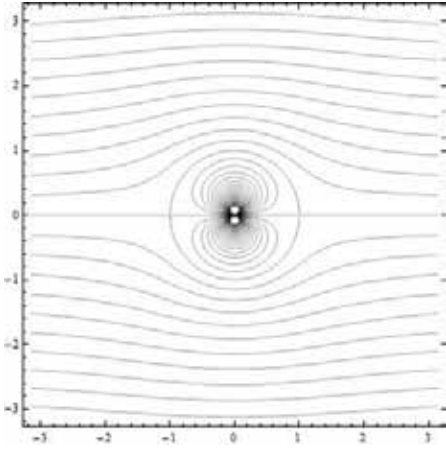


Abb. 5: Kombination von Parallelströmung und Dipol.

Für Stromlinien gilt, dass auf diesen keine senkrechten Geschwindigkeitskomponenten auftreten. Folglich müssen alle Wandkonturen Stromlinien sein. Da das Strömungsbild in Abb. 5 mit der Kontur eines Zylinder zusammenpasst, kann durch (22) also die Umströmung eines Zylinders beschrieben werden. Zur Vereinfachung kann man die Formel für  $R$  in das Potential einsetzen und erhält:

$$\chi = v_0 \cdot \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (18)$$

Eine Querkraft, dieses wird im Anschluss gezeigt, erhält man nun, wenn man zusätzlich noch eine Kreisströmung hinzufügt (siehe Abb. 6 und 7).

$$\chi = v_0 \cdot \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) \quad (19)$$

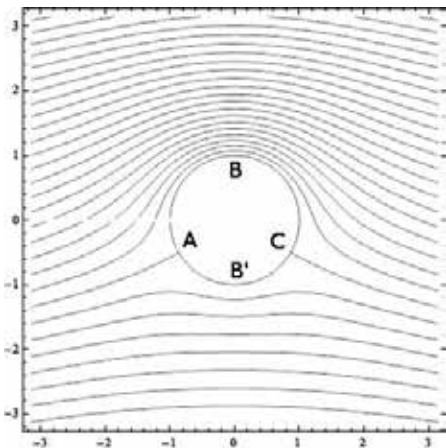


Abb. 6: Umströmung eines rotierenden Zylinders, Bezeichnungen der Staupunkte.

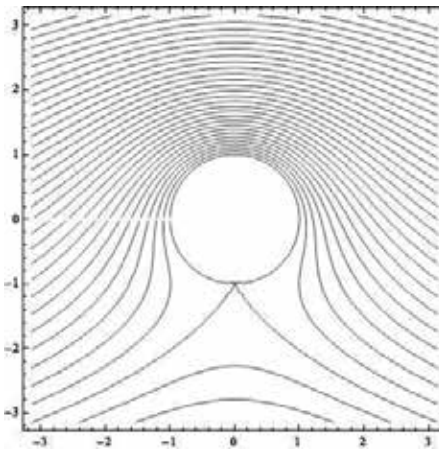


Abb. 7: Umströmung des Zylinders für  $\Gamma = 2\pi \cdot v_0 \cdot R$

Analog zur Quellenstärke in (10) kann man eine Wirbelstärke, auch Zirkulation genannt, durch

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{r} \quad (20)$$

definieren und erhält dann bei Verwendung der Strömungsgeschwindigkeit  $u$  des Wirbels auf der Zylinderoberfläche:

$$\Gamma = 2\pi \cdot R \cdot u \quad (21)$$

Das Potential wird damit letztendlich zu:

$$\chi = v_0 \cdot \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + i \cdot R \cdot u \cdot \ln(z) \quad (22)$$

Um die Querkraft zu berechnen benötigt man den statischen Druck  $p$  an jedem Ort der Strömung, dieser berechnet sich mithilfe der Bernoulli-Gleichung [2]:

$$p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = const \quad (23)$$

Ohne Einschränkung darf  $const = 0$  gesetzt werden, so dass folgt:

$$p = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \quad (24)$$

Zur Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit könnte man den Gradienten des Realteils des komplexen Potentials verwenden, einfacher ist es jedoch, die komplexe Geschwindigkeit zu verwenden.

$$w := \frac{d\chi}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = v_x - i v_y \quad (25)$$

Insbesondere ist dann:

$$\vec{v} \hat{=} \bar{w}, \quad v = |w| \quad (26)$$

Da für nachfolgende Überlegungen das Geschwindigkeitsfeld benötigt wird, wird hier nun die Berechnung der physikalischen Geschwindigkeit explizit ausgeführt:

$$w = \frac{d\chi}{dz} = v_0 \cdot \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + i \frac{R \cdot u}{z} \quad (27)$$

Zur Vereinfachung und um dem zylindersymmetrischen Problem gerecht zu werden, werden dafür nun Polarkoordinaten, also  $z = x + iy = r \cdot e^{i\phi}$  verwendet. Da für die Querkraft auf den Zylinder zudem nur die Strömung unmittelbar auf der Zylinderkontur relevant ist, darf schon hier  $r = R$  verwendet werden. Man erhält dann:

$$w = 2 \cdot v_0 \cdot \sin^2(\phi) + u \cdot \sin(\phi) + u \cdot \sin(\phi) + i \cdot (2 \cdot v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\phi) + u \cdot \cos(\phi)) \quad (28)$$

$$|w| = \sqrt{(2 \cdot v_0 \cdot \sin(\phi) + u)^2} = |2 \cdot v_0 \cdot \sin(\phi) + u| \quad (29)$$

$$p(\phi) = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (4 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2(\phi) + 4 \cdot v_0 \cdot u \cdot \sin(\phi)) \quad (30)$$

Um die Querkraft auf einen Zylinder der Länge  $l$  zu berechnen, wird der statische Druck über den Zylinderumfang (mit der Flächennormalen  $\hat{n} = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0)^T$  integriert. Da ein äußerer Druck eine Kraft in Richtung des Inneren des Zylinders verursacht, muss das Negative der Flächennormalen verwendet werden.

$$\vec{F} = \int -p \cdot \hat{n} dA \quad (31)$$

Dabei ist  $\hat{e}_y := (0, 1, 0)^T$  der Einheitsvektor in  $y$ -Richtung. Die Kraft auf den Zylinder hat ausschließlich einen Anteil in  $y$ -Richtung, wirkt also wie erwartet quer zur Anströmungsrichtung. Interessant ist, dass man hier nur lineare Abhängigkeiten erhält. Tatsächlich ist jedoch nicht zu erwarten, dass die Querkraft beliebig groß werden kann. Für  $u = 2v_0$  fallen die beiden Staupunkte  $A$  und  $C$  zusammen. Wenn nun  $u$  noch größer wird, so wandern die beiden Staupunkte weiter in Richtung negative  $y$ -Achse. Insbesondere entsteht dadurch auch ein Bereich, in dem das hierin enthaltene Fluid den Zylinder umkreist. Es ist aber nicht zu erwarten, dass in einem realen Fluid so ein Bereich existieren kann. Man kann also anhand der bisherigen Überlegungen vermuten, dass für  $u = 2v_0$  die maximale Querkraft auftritt.

$$\vec{F}_{\max} = 4\pi \cdot \rho \cdot R \cdot l \cdot v_0^2 \cdot \hat{e}_y \quad (32)$$



**2.2 Der maximale Quertriebsbeiwert**  
Mithilfe von dimensionslosen Beiwerten können geometrisch ähnliche Körper miteinander verglichen werden [2]. Allgemein berechnet sich der Beiwert durch:

$$c = \frac{F}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A} \quad (33)$$

Dabei ist  $A$  die projizierte Fläche in Richtung der Kraft. Im Zusammenhang mit der Querkraft auf einen rotierenden Zylinder kann man einen Quertriebsbeiwert  $c_q$  definieren. Unter Verwendung der projizierten Fläche  $A = 2R \cdot l$  erhält man mit (32) einen maximalen Beiwert von:

$$c_q = \frac{F_{\max}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot 2R \cdot l} = 4\pi \approx 12.6 \quad (34)$$

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass dieser Beiwert sehr viel größer als derer von Segeln oder Tragflächen ist. Für Tragflächen von Verkehrsflugzeugen liegt der Auftriebsbeiwert üblicherweise im Bereich von 1,2 bis 1,6 [4].

**2.3 Erklärung der Auslösung der Kreisströmung durch die Grenzschichttheorie**

In diesem Abschnitt soll nun nicht mehr von einem idealen, sondern von einem reibungsbehafteten Fluid ausgegangen werden. Nicht geklärt wurde durch die rechnerische Betrachtung, wodurch die für die Querkraft nötige Kreisströmung entsteht. Diese wurde zuvor als vorhanden vorausgesetzt. Es ist zwar anzunehmen, dass der rotierende Zylinder durch Reibungseffekte das ihn unmittelbar umgebende Fluid in eine Kreisströmung versetzt, dieser Bereich ist jedoch sehr klein, da die Reibung zwischen Zylinder und umgebender Luft sehr gering ist [5]. Man denkt sich eine Strömung, die von einem Körper gestört wird, als in zwei Bereiche geteilt. Einerseits den wandfernen Bereich, in dem die innere Reibung des Fluids in sehr guter Näherung vernachlässigt werden kann und somit die Gesetzmäßigkeiten des idealen Fluids gelten, und andererseits den wandnahen Bereich, die so genannte *Grenzschicht* [1]. In dieser Grenzschicht müssen Reibungseffekte mitbetrachtet werden. Die Strömungsgeschwindigkeit nimmt in der Grenzschicht zur Wand hin ab, unmittelbar bei einer Wand ist die relative Geschwindigkeit zwischen Wand und Fluid Null.

Zunächst rotiere der Zylinder nicht. Für die Strömungsgeschwindigkeit auf der Oberfläche des nichtrotierenden Zylinders gilt wie man nach (18) berechnen und mit (29) auch plausibel nachvollziehen kann:

$$v = |2v_0 \cdot \sin(\phi)| \quad (35)$$

Bei  $B$  und  $B'$  (Bezeichnungen wie zuvor) ist die Strömungsgeschwindigkeit maximal, der statische Druck also minimal. Mit diesen Informationen kann man nun das Verhalten eines Grenzschicht-Teilchens auf seinem Weg von  $A$  über  $B$  nach  $C$  beschreiben (s. Abb. 6)

Das Teilchen wird zwischen  $A$  und  $B$  zunächst beschleunigt. Zwischen  $B$  und  $C$  läuft es gegen den ansteigenden Druck an, so dass seine kinetische Energie wieder aufgezehrt wird. Ohne Reibung zwischen Teilchen und Oberfläche würde  $C$  aus Gründen der Energieerhaltung gerade erreicht werden. Aufgrund der Reibung kann das Teilchen den Druckanstieg aber nicht mehr überwinden und kehrt daher seine Bewegungsrichtung an einem bestimmten Punkt um. Da die Reibung mit dem Abstand zur Zylinderoberfläche absinkt, kehrt ein Teilchen umso früher um, je näher es sich an der Zylinderoberfläche befindet. Ein umgekehrtes Teilchen würde nun in eine gedämpfte Pendelbewegung zwischen  $B$  und  $C$  verfallen. Gleichzeitig strömen jedoch von  $B$  her ständig neue Grenzschicht-Teilchen nach und auch die an der Grenzschicht vorbeiströmenden Teilchen üben eine vorwärts-treibende Kraft aus. Insgesamt führt dieser Prozess dazu, dass sich in der Grenzschicht ein Wirbel ausbildet, der sich schließlich von der Oberfläche ablöst. Mit einem solchen Wirbel entsteht auch ein Drehimpuls. Da sich die Fluidmechanik letztendlich auf Bewegungen von einzelnen Teilchen zurückführen lässt, gilt auch hier das Prinzip der Drehimpulserhaltung. Von einem nichtrotierenden Zylinder lösen sich von Ober- und Unterseite zwei Wirbel mit entgegengesetzter Rotationsrichtung aus. Der Gesamtdrehimpuls verschwindet hier also.

Nun rotiere der Zylinder im Uhrzeigersinn, also dergestalt, dass die Umfangsgeschwindigkeit der Zylinderoberfläche  $u_z$  bei  $B$  nach rechts gerichtet ist. Im Vergleich zum nichtrotierenden

Zylinder sinkt wegen der geringeren Relativgeschwindigkeit die Reibung zwischen Grenzschicht-Teilchen und Oberfläche auf der Oberseite und steigt auf der Unterseite. Von der Unterseite lösen sich daher jetzt größere Wirbel ab, als von der Oberseite. Die Wirbel auf der Unterseite rotieren dabei links herum, der Drehimpuls der Wirbel verschwindet insgesamt jetzt nicht mehr. Nun werden die beiden Wirbel von der Strömung fortgetragen. Aus Gründen der Drehimpulserhaltung verbleibt in der Strömung jedoch ein Drehimpuls bezüglich des Zylinders. Hierdurch ist die Entstehung der Kreisströmung erklärt. Die Kreisströmung steigert nun die Strömungsgeschwindigkeit auf der Oberseite und senkt diese auf der Unterseite. Mit der Zeit werden also die Wirbel die sich von der Oberseite des rotierenden Zylinders ablösen größer, diejenigen, die sich von der Unterseite ablösen dagegen kleiner. Es lösen sich so lange Wirbel ab, bis sich ein Gleichgewicht einstellt und die von oben und unten abgehenden Wirbel wieder gleich groß sind.

Keineswegs ist es die Reibung zwischen Fluid und Zylinder direkt, die das umgebende Fluid in Rotation versetzt. Diese verursacht vielmehr Wirbelbildungen, als deren Folge dann eine Kreisströmung entsteht. Es ist daher nicht anzunehmen, dass die Geschwindigkeit der Kreisströmung nahe der Zylinderoberfläche der Rotationsgeschwindigkeit der Zylinderoberfläche  $u_z$  notwendigerweise entspricht. Im Allgemeinen gilt:

$$u \neq u_z \quad (36)$$

**2.4 Verknüpfung zwischen Grenzschichttheorie und Potentialtheorie**

Theoretisch geklärt wurde, dass für  $u = 2v_0$  die maximale Querkraft auftreten sollte. Fraglich bleibt jedoch, für welche Umfangsgeschwindigkeit  $u_z$  die maximale Querkraft auftritt. Die maximale Querkraft sollte dann auftreten, wenn die Umfangsgeschwindigkeit größer als die größte auftretende Strömungsgeschwindigkeit ist und so dann jedes Grenzschicht-Teilchen überall vorwärts mitgerissen wird. Dann ist, nachdem sich das zuvor beschriebene Gleichgewicht eingestellt hat, nicht mehr zu erwarten, dass sich noch Wirbel ablösen [6].

Wenn sich keine Wirbel mehr ablösen, entspricht das Strömungsbild in guter Näherung der mit der Potentialtheorie berechneten Strömung und so darf dann auch die theoretisch berechnete Formel für diesen Spezialfall angewendet werden. Die Strömungsgeschwindigkeit am Punkt  $B$  des nichtrotierenden Zylinders ist  $2v_0$ . Für die maximale Querkraft ist die Geschwindigkeit der Kreisströmung ebenfalls  $2v_0$ . Die größte in der Strömung auftretende Geschwindigkeit ist also  $4v_0$ . Also ist zu erwarten, dass die maximale Querkraft und der maximale Quertriebsbeiwert dann erreicht werden, wenn  $u_z = 4v_0$  ist.

### 3 Experimentelle Verifikation

#### 3.1 Verwendete Methode und experimentelles Vorgehen

Im Experiment soll nun gezeigt werden, wie die Querkraft auf einen angeströmten Zylinder von dessen Geometrie und der Rotationsgeschwindigkeit abhängt. Als Fluid wird dabei Luft verwendet, denkbar wäre es zwar auch, die Versuche in Wasser durchzuführen, dies würde aber einen sehr viel komplizierteren Versuchsaufbau nötig machen. Der Versuchsaufbau muss möglichst stabil sein, um durch die Rotation erzeugte Vibrationen möglichst gering zu halten. Weiter müssen die verwendeten Zylinder möglichst gut ausgewuchtet sein, da diese sonst exzentrisch rotieren. Der Versuchsaufbau selbst darf die Strömung in der Umgebung des Zylinders möglichst wenig stören.

Zur Erzeugung des Luftstroms wird ein stufenlos regelbares (zwischen 0 m/s und 9 m/s) Druckgebläse von Leybold mit aufgesetzter Venturi-Düse (Durchmesser 16 cm) verwendet. Die Messung der Strömungsgeschwindigkeit erfolgt mit einem Repeller-Anemometer. Da die Strömung nicht über den gesamten Querschnitt perfekt laminar ist, schwankt die gemessene Geschwindigkeit zeitlich. Es wird daher eine Unsicherheit von  $\pm 0,3$  m/s verwendet. Die drei verwendeten Zylinder (Länge zwischen 8,5 cm und 17 cm, Radius zwischen 1 cm und 2 cm) werden senkrecht stehend in einer Waage befestigt. An den Zylindern sind Endscheiben befestigt, die störende Randeffecte verhindern sollen. Die Achsen der Zylinder laufen in kleinen Kugellagern. Die Drehachse der Waage ist auf der einen Seite angespitzt und sitzt auf einem angekörnten Glasplättchen auf. Die andere Seite

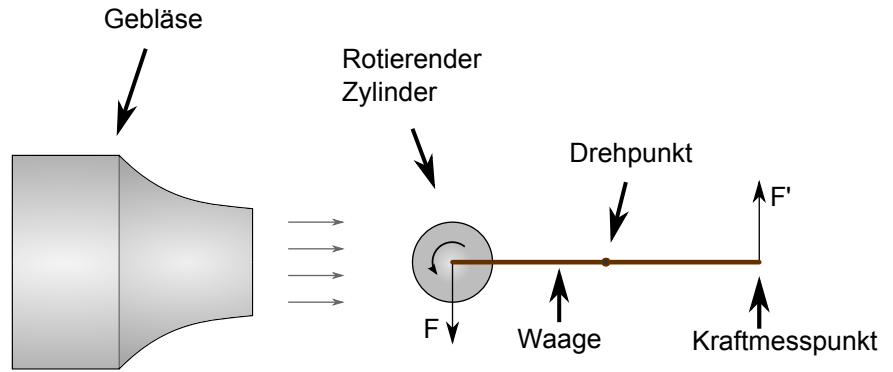


Abb. 8: Prinzipskizze des Versuchsaufbaus.



Abb. 9: Foto des Versuchstisches.

der Achse wird von einem Fangblech gehalten, so dass die Lagerung der Waage sehr reibungsarm ist. Die Querkraft wird nicht direkt am Zylinder, sondern an dem dem Zylinder gegenüber liegenden Bügel gemessen (siehe Abb. 8 und 9). In Vorversuchen zeigte sich, dass es aufgrund von Resonanzschwingungen schwierig ist, mithilfe von federbasierten Kraftmessern die Querkraft mit der nötigen Genauigkeit abzulesen (siehe Abb. 10). Alle Kraftmessungen werden daher mit einem elektronischen Kraftmesser und einem CASSY-System durchgeführt. Mit diesem sind Kraftmessungen mit einer Unsicherheit von  $\pm 5$  mN möglich. Der Kraftmesser arbeitet mit einer Abtastrate von  $10^5$  Messungen pro Sekunde und mittelt jeweils über den Zeitraum von einer Sekunde. Die Kalibrierung erfolgte mit Gewichten, die zuvor mit einer Präzisionswaage abgemessen wurden.



Abb. 10: Befestigung des Kraftmessers.

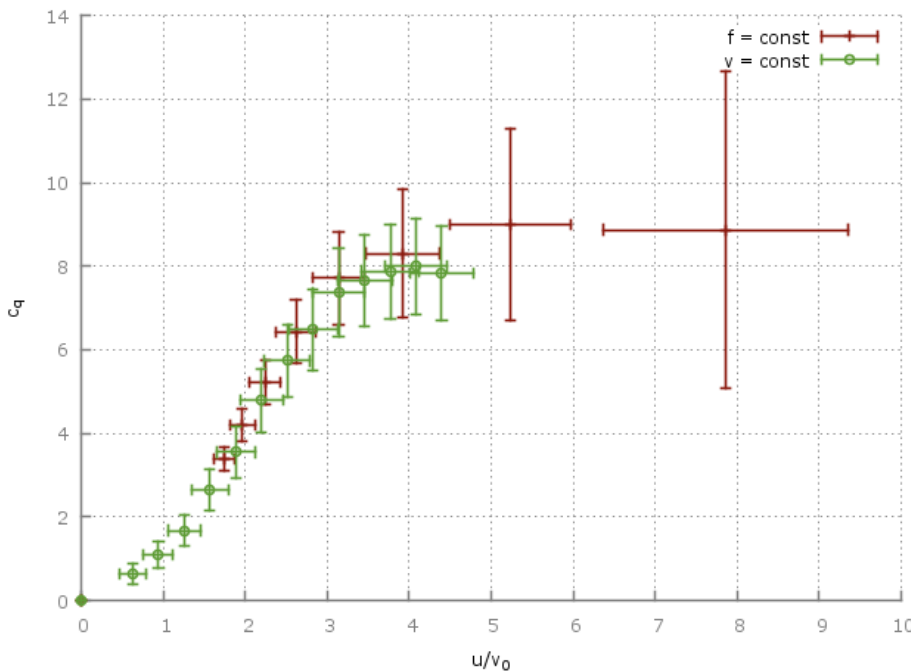


Abb. 11: Messung für Zylinder mit  $R = 1 \text{ cm}$ ,  $l = 8.5 \text{ cm}$ .

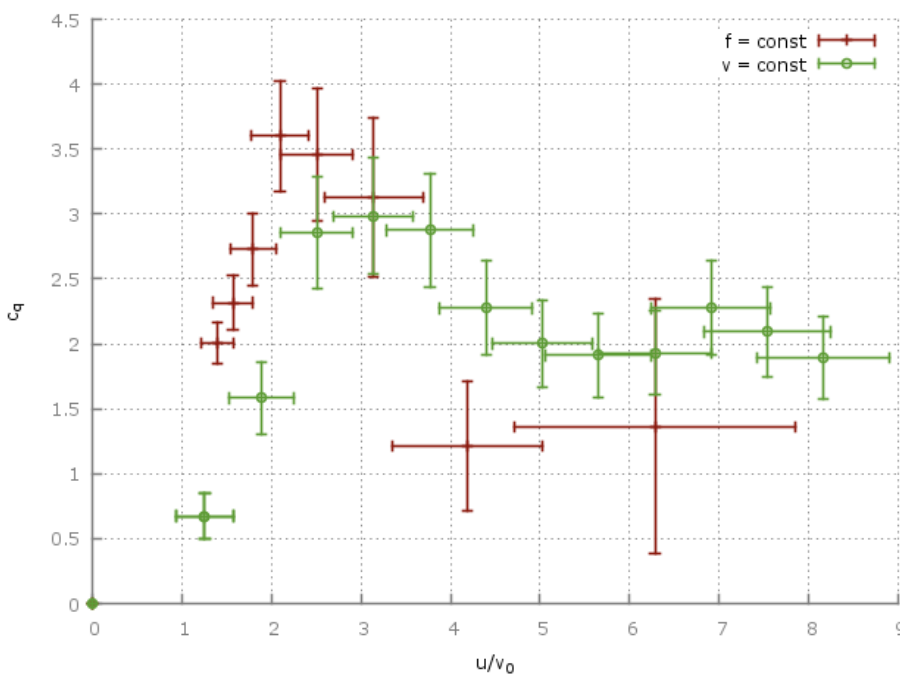


Abb. 12: Messung für Zylinder mit  $R = 2 \text{ cm}$ ,  $l = 8.5 \text{ cm}$ .

Die Rotationsgeschwindigkeit des Zylinders sollte gemessen werden, ohne in den Versuchsaufbau einzugreifen. Hierzu wird der Spannungsverlauf an den Anschlüssen des verwendeten Elektromotors mit einem Oszilloskop ausgewertet. Mithilfe der Fouriertransformation des Signals erhält man einen deutlichen Peak, der für ein vielfaches (abhängig von der Anzahl der Spulen im Motor) der Rotationsfrequenz steht. Als sinnvolle Unsicherheit über den

gesamten Messbereich werden  $\pm 10 \text{ Hz}$  angenommen. Die gemessene Querkraft beziehungsweise die daraus errechneten Quertriebsbeiwerte werden in der Auswertung des Versuchs in Abhängigkeit des Verhältnisses  $\lambda$  zwischen Anströmungsgeschwindigkeit und Umfangsgeschwindigkeit dargestellt. Unter Verwendung der Rotationsfrequenz  $f$  gilt:

$$\lambda := \frac{u_Z}{v_0} = 2\pi \cdot R \cdot \frac{f}{v_0} \quad (37)$$

Für jeden Zylinder werden zwei Messreihen aufgenommen. Für die erste Messreihe wird die Anströmungsgeschwindigkeit auf  $5 \text{ m/s}$  eingestellt und bei diesem Wert belassen. Anschließend wird die Rotationsfrequenz in Schritten von  $25 \text{ Hz}$  gesteigert. Bei einer zweiten Messreihe wird die Rotationsfrequenz konstant gehalten und die Anströmungsgeschwindigkeit in Schritten von  $1 \text{ m/s}$  gesteigert. Vor Beginn jeder Messreihe muss darauf geachtet werden, dass der Zylinder genau parallel zum Bügel der Waage angeströmt wird.

### 3.2 Ergebnisse des Versuchs

#### 3.2.1 Quertriebsbeiwerte in Abhängigkeit von $\lambda$

Man erkennt, dass bei allen Messreihen (Abb. 11 bis 13) mit steigendem  $\lambda$  zunächst auch die Querkraft steigt. Wie erwartet erhält man jedoch kein lineares Ansteigen, wie es die Theorie der Potentialströmungen vermuten lässt. Es bestätigt sich, dass bei  $\lambda \approx 4$  der maximale Quertriebsbeiwert erreicht wird. Lediglich der Zylinder in Abb. 12 zeigt ein etwas anderes Verhalten. Dieses lässt sich allerdings dadurch erklären, dass hier bei den Messungen sehr starke Resonanzschwingungen auftraten, die die Querkraft abschwächten.

Ein Beiwert von  $\approx 12.57$  konnte nicht erreicht werden, jedoch stimmt die Größenordnung überein. Insbesondere für den kleinsten verwendeten Zylinder wird ein Beiwert von  $\approx 9$  erreicht, was als sehr gutes Ergebnis gewertet werden kann. Dieser Zylinder wird von der Strömung bestmöglich vollständig eingehüllt, so dass hier im Vergleich zu den anderen Zylindern der größte Beiwert erreicht wird.

#### 3.2.2 Einfluss der Endscheiben

Interessant ist auch der Vergleich zwischen Abb. 13 und Abb. 14. Hier wurde zweimal der gleiche Zylinder verwendet, einmal jedoch ohne Endscheiben. Es zeigt sich, dass mit Endscheiben ein größerer Beiwert erreicht wird. Die Endscheiben verhindern, dass es einen Druckausgleich über den Rand des Zylinders hinweg zwischen Gebieten mit höherem und solchen mit niedrigerem Druck gibt. Hiermit wurde gezeigt, dass Randeffekte die Querkraft abschwächen.

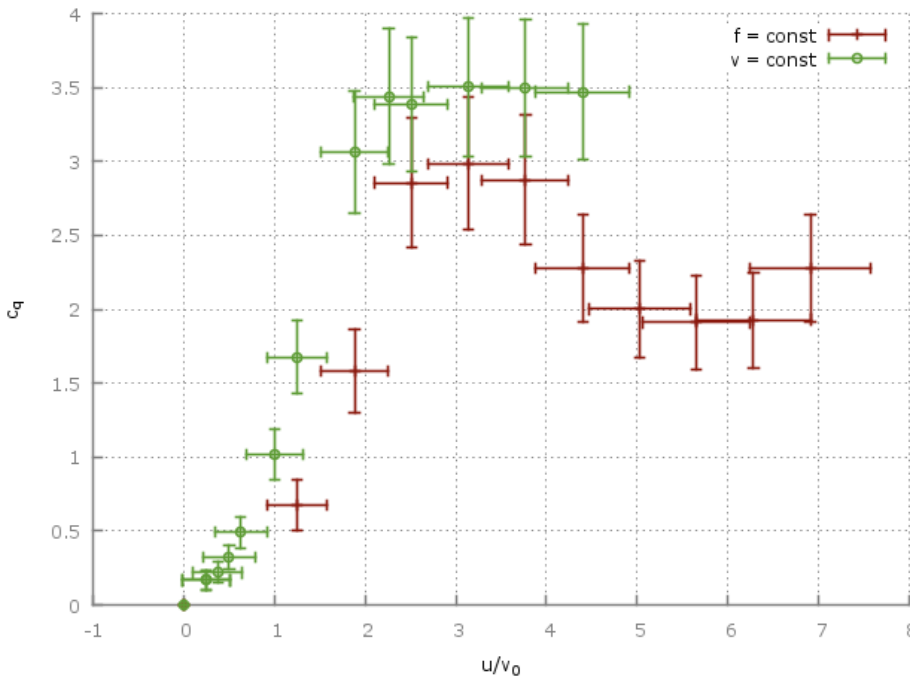


Abb. 13: Messung für Zylinder mit  $R = 2 \text{ cm}$ ,  $l = 17 \text{ cm}$ .

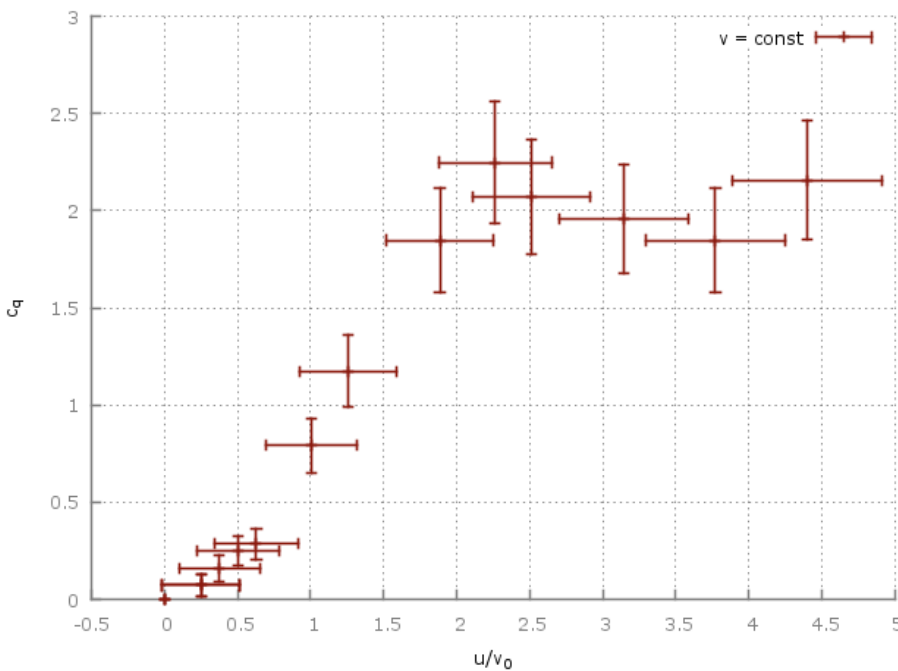


Abb. 14: Messung für Zylinder mit  $R = 2 \text{ cm}$ ,  $l = 17 \text{ cm}$ , Ohne Endscheiben.

### 3.3 Betrachtung der Unsicherheiten im Versuch

Es müssen die systematischen Unsicherheiten von  $c_q$  und  $\lambda$  mit Hilfe der Regeln der Fehlerfortpflanzung berechnet werden. Dabei werden Radius und Länge des Zylinders sowie die Dichte der Luft als konstant und exakt angenommen.

$$\Delta c_q = \left| \Delta F \cdot \frac{\partial c_q}{\partial F} \right| + \left| \Delta v \cdot \frac{\partial c_q}{\partial v} \right| = \frac{1}{\rho \cdot R \cdot l} \cdot \left( \left| \Delta F \cdot \frac{1}{v^2} \right| + \left| \Delta v \cdot \frac{2F}{v^3} \right| \right) \quad (37)$$

$$\Delta \lambda = \left| \Delta f \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial f} \right| + \left| \Delta v \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right| = 2\pi \cdot R \cdot \left( \left| \Delta f \cdot \frac{1}{v} \right| + \left| \Delta v \cdot \frac{f}{v^2} \right| \right) \quad (38)$$

Diese Rechnungen werden für jede Messung einzeln ausgeführt und sind in den Diagrammen als Fehlerkreuz dargestellt.

### 3.4 Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse bestätigen die theoretischen Überlegungen weitgehend. Es konnte sehr schön gezeigt werden, dass der maximale Quertriebsbeiwert für  $\lambda=4$  erreicht wird. Um die maximale Querkraft zu erhalten, muss die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders also auf das vierfache der Anströmungsgeschwindigkeit eingestellt werden. Fraglich bleibt jedoch das Verhalten der Querkraft für  $\lambda > 4$ , denn in einen Fall konnten dafür nicht die benötigten Rotationsfrequenzen erreicht werden, im anderen Fall kann bei einer sehr niedrigen Anströmungsgeschwindigkeit die sehr kleine Querkraft nicht mit der für eine sichere Aussage nötigen Genauigkeit gemessen werden. Problematisch bei den Messungen waren besonders die hohen benötigten Rotationsfrequenzen der verwendeten Zylinder. Diese hohen Rotationsfrequenzen lösen aufgrund der immer vorhandenen geringen Unwucht der Zylinder Resonanzschwingungen im gesamten Versuchsaufbau aus. Diese Schwingungen erschweren eine genaue Kraftmessung. Auch müsste für genauere Messungen das Gebläse ersetzt, und die Versuche in einem richtigen abgeschlossenen Windkanal durchgeführt werden, denn sonst werden die verwendeten Zylinder nicht vollständig von der Strömung eingehüllt. Außerdem ist die Strömungsgeschwindigkeit des Gebläses nicht über den gesamten Querschnitt konstant.

### 4 Schlussbetrachtungen

Die Frage nach der größtmöglichen Querkraft und nach der dafür nötigen Rotationsgeschwindigkeit konnte geklärt werden. Offen bleibt aber noch, wie viel Energie durch einen Flettner-Rotor gegenüber einem konventionellen Schiff tatsächlich gespart werden kann, denn hierzu muss insbesondere die zum Antrieb der Rotoren nötige Energie mitberücksichtigt werden. Bei Untersuchungen an der Universität Flensburg zeigt sich, dass für  $\lambda > 4$  das Antriebsmoment des Zylinders stark ansteigt [7]. Eine Erklärung der Ursachen dafür steht noch aus, die Vorgänge beim Magnus-Effekt auf Teilchenebene sind noch nicht vollends erforscht.



### Danksagung

Mein Dank gilt all jenen die die Anfertigung dieser Arbeit ermöglicht und unterstützt haben. Die Versuche wurden im Rahmen von Forschungscamps des Erlanger Schülerforschungszentrums durchgeführt, stellvertretend genannt seien Prof. Gisela Anton und Dr. Jürgen Durst. Ursprünglich handelte es sich hierbei um meine Facharbeit im Leistungskurs Physik, Betreuer war Anton Ackstaller. Ein Jahr später nahm ich mit dieser Arbeit bei Jugend forscht teil, wobei diese dort von Dr. Severin Zebhauser betreut wurde. Meine Eltern Dr. Karin und Robert Ettlinger haben bis weit nach Mitternacht bei der Anfertigung von Ausstellungsplakaten mitgeholfen und diese anschließend quer durch Deutschland transportiert, der Aufbau des Versuchsapparats wäre ohne die mithilfe von Rainer und Helmut Matzke nicht möglich gewesen.

### Quellenverzeichnis

- [1] Schlichting/Gersten: Grenzschicht-Theorie, Springer, Berlin, 2006
- [2] Stöcker: Taschenbuch der Physik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2010
- [3] Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2008
- [4] Klußman/Malik: Lexikon der Luftfahrt, Springer, Berlin, 2007
- [5] Poisson: Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à leur figure et leur rotation, et l'influence du mouvement diurne de la terre, Bachelier imprimeur-libraire, Paris, 1839
- [6] Prandtl: Magnuseffekt und Windkraftschiff, in: Die Naturwissenschaften, 6, 13. Jahrgang, 1925
- [7] Fiesser: UniKat-Flensburg, Flettner-Rotor als alternativer Schiffsantrieb, in: Physik in unserer Zeit, 5, 40, 2009
- [8] Magnus: Über die Abweichung der Geschosse, in: Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie, 1, 88, 1853
- [9] Sigloch: Technische Fluidmechanik, Springer, Berlin, 2009
- [10] Dupeux et al: The spinning ball spiral, in: New J. Phys, 12, 093004, 2010
- [11] Zdravkovich: Flow Around Circular Cylinders: Applications, Oxford University Press, New York, 2003