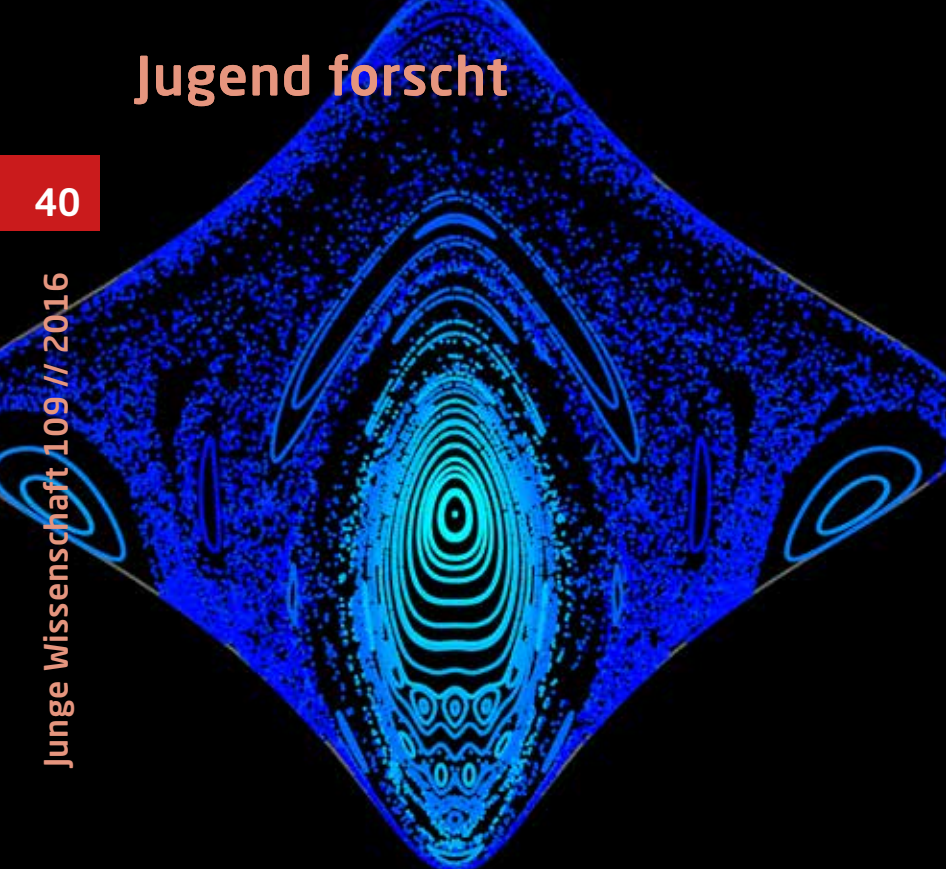

Vincent Stimper, *1995

Karl-Schmidt-Rottluf-Gymnasium, Chemnitz

Eingang der Arbeit:
Januar 2015

Zur Veröffentlichung angenommen:
April 2015

Zwischen Harmonie und Chaos

Ein verallgemeinertes Modell des Doppelpendels

Das Doppelpendel ist ein seit Langem bekanntes Beispiel für harmonische und chaotische Bewegungen. In dieser Arbeit wurde ein neues Doppelpendel-Modell eingeführt. Umfangreiche, numerische und analytische Untersuchungen zeigen nicht nur, dass das herkömmliche Modell in diesem enthalten ist, sondern fördern viele weitere Effekte, wie den Übergang vorher strickt getrennt auftretender Bewegungszustände, zu Tage.

1 Das lange Doppelpendel

Bereits in der 7. Klasse wird in der Schule gelehrt, dass die potentielle Energie eines Körpers im Bann der Gravitation der Erde mit der Formel

$$E_{pot} = mgh \tag{1}$$

berechnet wird [1, 2, 3]. Setzen wir uns tiefer mit der Physik auseinander, betrachten wir insbesondere die mathematische Herleitung der physikalischen Formeln, stellen wir fest, dass diese Formel nicht ganz exakt ist, sondern nur eine Näherung darstellt. Wir erhalten die genaue potentielle Energie eines Körpers mit der Masse m im Abstand r zu einem Zentralkörper mit der Masse M im Bezug zu einem Punkt, der sich im Abstand R_0 zum Zentralkörper auf der Verbindungslinie dieses mit dem Körper befindet, durch Integration über die Gravitationskraft [1].

$$E_{pot,R_0} = \int_{R_0}^{r} F_G \mathrm{d}x = \int_{R_0}^{r} G\frac{Mm}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-G\frac{Mm}{x}\right]_{x=R_0}^{x=r} = G\frac{Mm}{R_0} - G\frac{Mm}{r} \tag{2}$$

Diese Formel ist wesentlich komplizierter als (1) und vor allem nichtlinear. Deswegen wird (1) in der Regel auch zur Herleitung von Bewegungsgleichungen u.Ä. verwendet. Jedoch gilt (1) nur für $h << R_0$. Dies ist beim klassischen Doppelpendelmodell auch der Fall, denn es beschreibt ein Pendel, an dessen unteren Pendelkörper ein zweites Pendel beweglich angebracht ist, welches nahe der Erdoberfläche in Schwingungen versetzt wird [4, 5]. Deswegen wird auch (1) zur Herleitung der Bewegungsgleichung des klassischen Doppelpendels verwendet [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Nun stellt sich jedoch die Frage, wie sich das Verhalten dieses Systems verändert, wenn wir diese Näherung nicht eingehen. Wir wollen die Bewegungsgleichung mit (2) statt mit (1) herleiten und gelangen damit zu einem erweiterten Doppelpendelmodell, dem **langen Doppelpendel**. Der Wert der „Höhe“ der Pendelkörper wird beim Doppelpendel durch die Größenordnung der Pendellängen beschränkt. Wählen wir besonders lange Pendellängen, so ist $h << R_0$ folglich nicht mehr gerechtfertigt. Daher kommt die Bezeichnung langes Doppelpendel für die Modellerweiterung. Im Modell des langen Doppelpendels werde das Pendel von einer räumlich fixierten Punktmasse der Masse M angezogen. Der Aufhängepunkt des Doppelpendels habe den Abstand R von der Punktmasse. Der Bezugspunkt

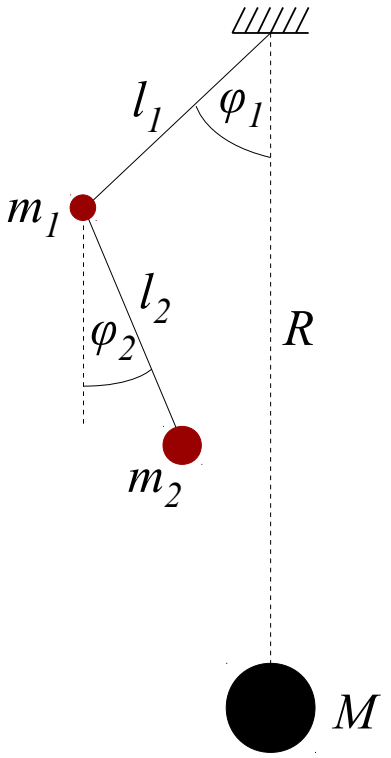

Abb. 1: Skizze des langen Doppelpendels.

für die potentielle Energie der Pendelkörper sei deren Ruhelage. Verwenden wir die in Abb. 1 ersichtlichen Bezeichnungen für die Parameter des Doppelpendels, gilt nun:

$$E_{kin} = T = \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 \left(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2\right) \quad (3)$$

Diese Gleichung gilt ebenfalls für das klassische Doppelpendelmodell (da wir auch beim langen Doppelpendel nichtrelativistisch bleiben wollen). Den Unterschied macht die potentielle Energie aus. Für das lange Doppelpendel gilt unter Nutzung von (2):

$$E_{pot} = V = \frac{GMm_1}{R-l_1} - \frac{GMm_1}{\sqrt{R^2-2Rl_1\cos(\varphi_1)+l_1^2}} + \frac{GMm_2}{R-l_1-l_2} - \frac{GMm_2}{\sqrt{(R-l_1\cos(\varphi_1)-l_2\cos(\varphi_2))^2+(l_1\sin(\varphi_1)+l_2\sin(\varphi_2))^2}} \quad (4)$$

Da die Wirkung selbstverständlich auch in diesem System minimiert wird [2, 3], gilt mit L = T – V der Lagrange-Formalismus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (5)$$

für i = 1 und i = 2. Daraus folgt:

$$0 = \ddot{\varphi}_1 (m_1 + m_2) l_1 + \ddot{\varphi}_2 m_2 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{c_1}{2(c_2+c_3)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c_4}{c_5} \quad (6)$$

$$0 = \ddot{\varphi}_2 m_2 l_2 + \ddot{\varphi}_1 m_2 l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{c_6}{2(c_2+c_3)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Mit

$$c_1 := GMm_2 (2R\sin(\varphi_1) + 2l_2\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) - 2l_2\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)) \quad (8)$$

$$c_2 := R^2 + {l_1}^2 + {l_2}^2 - 2Rl_1\cos(\varphi_1) - 2Rl_2\cos(\varphi_2) \quad (9)$$

$$c_3 := 2l_1 l_2 \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \quad (10)$$

$$c_4 := GMm_1 R\sin(\varphi_1) \quad (11)$$

$$c_5 := \left(R^2 - 2Rl_1\cos(\varphi_1) + {l_1}^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (12)$$

$$c_6 := GMm_2 (2R\sin(\varphi_2) - 2l_1\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + 2l_1\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)) \quad (13)$$

Die Bewegungsgleichungen (6) und (7) enthalten die Beschleunigungen $\ddot{\varphi}_1$ und $\ddot{\varphi}_2$ beide nur linear, folglich können wir das Gleichungssystem aus diesen beiden Gleichungen nach den Beschleunigungen umstellen und das erhaltene Differentialgleichungssystem mit dem PC numerisch lösen. Wir verwenden dafür den Standardintegrator *ode45* des Programms Matlab [5, 11] mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-10}.

2 Untersuchung der Bewegung des langen Doppelpendels

Wir wollen nun die Bewegungen des langen Doppelpendels untersuchen und sie mit denen des klassischen Doppelpendels vergleichen. Dazu führen wir Simulationen durch. Wir lösen die Bewegungsgleichungen numerisch mit ausgewählten Anfangsbedingungen über einen bestimmten Zeitraum. Die Ergebnisse stellen wir grafisch dar und nutzen die Diagramme zur Analyse der Bewegung.

2.1 Vorbereitung der Simulation

2.1.1 Poincaré-Schnitte

Eine Darstellung, bei der wir besonders gut unterscheiden können, ob es sich bei der betrachteten Bewegung um eine periodische, eine quasiperiodische oder eine chaotische handelt, ist der Poincaré-Schnitt.

Definition 1:
Wir legen in einen Phasenraum eine Hyperfläche *H*, deren Dimension kleiner als die des Phasenraums ist. Die Menge aller Schnittpunkte der Trajektorie mit *H* wird Poincaré-Schnitt genannt [4, 8].

Bevor wir uns Gedanken machen, wie wir einen solchen Poincaré-Schnitt für das Doppelpendel erstellen können, müssen wir uns die Vorteile dieser Darstellungsart vergegenwärtigen. Nehmen wir an, wir betrachten den Phasenraum eines Systems, welches sich periodisch bewegt. Dann ist die Trajektorie zwangsweise eine geschlossene Kurve. Jede beliebige Hyperfläche kann diese Kurve nur in endlich vielen Punkten schneiden (falls keine Koordinate konstant ist, was wir annehmen können). Der Poincaré-Schnitt besteht folglich nur aus einzelnen Punkten. Die Trajektorie

im Phasenraum eines sich quasiperiodisch bewegenden Systems besteht aus vielen ähnlichen, zueinander verschobenen oder gestreckten Kurven. Die Schnittpunkte mit einer Hyperfläche liegen schrittweise verschoben und eng beieinander. Sie bilden Linien und (eventuell geschlossene) Kurven. Die Trajektorie eines chaotischen physikalischen Systems können wir allgemein nicht näher charakterisieren. Dennoch können wir etwas über die Poincaré-Schnitte dieses Systems aussagen. Der Grund ist, dass für jedes physikalische System Energieerhaltung gilt, wenn wir es richtig abgrenzen.

Da wir aus den Koordinaten und den Geschwindigkeiten aller im System enthaltenen Teilchen stets die Gesamtenergie des Systems bestimmen können, lässt sich auch für jeden Punkt des Phasenraums eine entsprechende Energie bestimmen. Da sich die Gesamtenergie des Systems nie ändern darf, kann sich die Trajektorie für gegebene Anfangsbedingungen nur über eine bestimmte Menge von Punkten erstrecken. Das führt dazu, dass wir im Poincaré-Schnitt Flächen oder räumliche Ansammlungen von Punkten, eine Art Punktwolke, beobachten, die in der Regel jedoch die Hyperfläche nicht komplett ausfüllen [4, 8, 9].

Da die unterschiedlichen Bewegungsarten in den Poincaré-Schnitten unterschiedliche Erscheinungsbilder besitzen, können wir aus der Form der beobachteten Punktansammlungen leicht auf die Bewegungsart schließen.

Es gibt eine einfache Möglichkeit, eine Hyperfläche in einem Phasenraum zu charakterisieren (vgl. [4]): Wir müssen nur fordern, dass eine der Koordinaten einen bestimmten Wert annimmt. Diese Forderung wird auch als Poincaré-Bedingung bezeichnet. Wenn wir Poincaré-Schnitte für das Doppelpendel erstellen wollen, müssen wir zunächst eine solche Bedingung aufstellen. Wir wählen $\varphi_1 = 0$, also die Ruheposition des oberen Pendels. Wir fordern zur besseren Übersichtlichkeit noch eine weitere Bedingung. Wir betrachten dazu zunächst die Gesamtenergie des Doppelpendels.

$$E_{tot} = \tfrac{1}{2}\left(m_1+m_2\right) l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + E_{pot}(\varphi_1,\varphi_2) \tag{14}$$

Nach φ_1 umgestellt ergibt sich im Falle des Eintritts der Poincaré-Bedingung $\varphi_1 = 0$:

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{m_2 l_2 \cos(\varphi_2)}{(m_1+m_2) l_1}\dot{\varphi}_2 \pm \sqrt{\left(\frac{m_2 l_2 \cos(\varphi_2)}{(m_1+m_2) l_1}\dot{\varphi}_2\right)^2 - \frac{m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2E_{pot}(0,\varphi_2) - 2E_{tot}}{(m_1+m_2) l_1^2}} \tag{15}$$

Für jede Wahl der Werte E_{tot}, φ_2 und φ_2 gibt es nach dieser Gleichung zwei mögliche Werte für φ_1. Das führt dazu, dass wir im Poincaré-Schnitt zwei kongruente gespiegelte Figuren erkennen, welche sich teilweise gegenseitig überdecken. Um die Struktur eines Teils besser untersuchen zu können, betrachten wir bei dem ± nur den Fall +. Wir fordern also zusätzlich zur Poincaré-Bedingung $\varphi_1 = 0$, dass

$$\dot{\varphi}_1 + \frac{m_2 l_2 \cos(\varphi_2)}{(m_1+m_2) l_1}\dot{\varphi}_2 \geq 0 \tag{16}$$

beziehungsweise

$$\dot{\varphi}_1 l_1 \left(m_1+m_2\right) + \dot{\varphi}_2 l_2 m_2 \cos\left(\varphi_2\right) \geq 0 \tag{17}$$

erfüllt ist. Diese Poincaré-Bedingungen liefern uns Punkte mit je drei Koordinaten. Da wir jedoch ein dreidimensionales Koordinatensystem nur schlecht veranschaulichen können, projizieren wir die Punkte auf eine Ebene. Wir betrachten also nur φ_2 und $\dot{\varphi}_2$. Diese Punkte tragen wir in ein normales zweidimensionales Koordinatensystem ein und erhalten so eine Projektion des Poincaré-Schnitts. Zur Erstellung der Poincaré-Schnitte lösen wir die Bewegungsgleichungen von $t_1 = 0$ bis $t_2 = 5000$s. Wir erhalten dadurch eine ausreichende Anzahl an Punkten, sodass wir für die Interpretation notwendige Details erkennen können. Der relative Fehler beträgt in diesem Fall maximal 10^{-3}, was eine hinreichende Genauigkeit darstellt.

2.1.2 Gewährleistung der Vergleichbarkeit der Doppelpendelmodelle

Es ist zu erwarten, dass sich das lange Doppelpendel nicht vom klassischen unterscheidet, wenn wir $R = R_{Erde}$ wählen. Wir müssen R folglich verändern, um Unterschiede ausmachen zu können. Vergrößern oder verkleinern wir jedoch R, schwächen beziehungsweise verstärken wir damit auch das Gravitationsfeld und damit die Maximalwerte der Koordinaten. Möchten wir diese Skalierungen aber beibehalten, müssen wir M anpassen, da das Gravitationsfeld außer von R nur noch durch G und M beschrieben wird und G eine Naturkonstante ist. Die Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ können nur maximal werden, wenn $E_{pot} = 0$ ist. Dann ist

$$E_{tot} = E_{kin,1} + E_{kin,2} = \tfrac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2\right) \tag{18}$$

gegeben. Da sowohl $\dot{\varphi}_{1,max}$ als auch $\dot{\varphi}_{2,max}$ somit nur von der Anfangsenergie abhängen können, sind Simulationen mit gleichen Anfangsenergien immer miteinander vergleichbar. Um einen Ausdruck für M zu finden, fordern wir die Gleichheit der Maximalwerte von φ_2 in den verschiedenen Modellen. In beiden tritt dieser auf, wenn $\varphi_1 = 0$ gilt und im Fall $\varphi_{2,max} < \pi$ auf den wir uns hier beschränken wollen) auch $\dot{\varphi}_1 = 0$ und $\dot{\varphi}_2 = 0$ gegeben ist. Ist dies erfüllt, gilt im klassischen Modell

$$E_{tot} = E_{pot,2} = m_2 g h = m_2 g l_2 \left(1 - \cos\left(\varphi_{2,max}\right)\right) \tag{19}$$

und somit

$$\cos\left(\varphi_{2,max}\right) = 1 - \frac{E_{tot}}{m_2 g l_2} \tag{20}$$

Für das Modell des langen Doppelpendels erhalten wir:

$$E_{tot} = \frac{G M m_2}{R - l_1 - l_2} - \frac{G M m_2}{\sqrt{(R-l_1)^2 - 2(R-l_1) l_2 \cos(\varphi_{2,max}) + l_2^2}} \tag{21}$$

Wir setzen nun (20) in (21) ein und stellen die erhaltene Gleichung nach M um.

$$M = \frac{E_{tot}}{G m_2}\left(\frac{1}{R-l_1-l_2} - \frac{1}{\sqrt{(R-l_1)^2 - 2(R-l_1) l_2 \left(1 - \frac{E_{tot}}{m_2 g l_2}\right) + l_2^2}}\right) \tag{22}$$

2.2 Betrachtung der Poincaré-Schnitte

Wir wollen nun Simulationen der Bewegung des langen Doppelpendels durchführen. Wir setzen für alle Simulationen zunächst $l_1 = l_2 = 1$m und $m_1 = m_2 = 1$ kg. Für jede Simulation geben wir uns jeweils eine Gesamtenergie E_{tot} vor. Wir bestimmen verschiedene Anfangsbedingungen, die eine solche Gesamtenergie haben, und lösen für diese die Bewegungsgleichungen. Aus den Lösungen erstellen wir Poincaré-Schnitte, die durch verschiedene Blautöne gekennzeichnet in ein gemeinsames Diagramm eingetragen werden. Ein Blauton entspricht folglich einem Poincaré-Schnitt, der aus einer Anfangsbedingung hervorgegangen ist. Die Anfangsbedingungen werden so gewählt, dass die Fülle an möglichen Poincaré-Schnitten möglichst voll ausgeschöpft und gut dargestellt wird. Somit erreichen wir, dass wir eine Übersicht über das Verhalten des Doppelpendels bei allen möglichen Anfangsbedingungen einer Energie erhalten. Das ist besonders wichtig, da das Doppelpendel dafür bekannt ist, dass es sich bei einer Energie sowohl periodisch bzw. quasiperiodisch oder chaotisch bewegen kann, je nachdem, wie die Anfangsbedingungen gewählt wurden.

Wir beginnen mit dem Grenzfall $R \to \infty$. In Abb. 2 sehen wir Poincaré-Schnitte von verschiedenen Energien und Anfangsbedingungen. Bei $E_{tot} = 1$ J erkennen wir zwei Gruppen von verzerrten Ellipsen. Sie symbolisieren quasiperiodische Bewegungen und ordnen sich um je einen zentralen Punkt an. Diese zentralen Punkte sind die Poincaré-Schnitte periodischer Bewegungen, da sie aus genau einem Punkt bestehen. Diese beiden einzigen aus einem Punkt im Poincaré-Schnitt bestehenden Bewegungen stellen die Eigenzustände des linearisierten klassischen Doppelpendels dar. Dieses Modell erhalten wir, indem wir die Bewegungsgleichung des Doppelpendels unter Verwendung von Kleinwinkelnäherungen herleiten [12]. Der untere punktförmige Poincaré-Schnitt in Abb. 2 (oben links) stellt eine Bewegung dar, die als gegensinnige Schwingung bezeichnet wird und der obere punktförmige Poincaré-Schnitt die sogenannte Schwebung (vergleiche Abbildung 3 und [13]).

An dieser Stelle muss noch eine wichtige Tatsache hinzugefügt werden, die nicht nur für die eben betrachteten Poincaré-Schnitte Gültigkeit besitzt, sondern für alle im Rahmen dieser Arbeit erstellten. Zwischen den Linien quasiperiodischer Poincaré-Schnitte befinden sich immer auch periodische, die aus einer endlichen Anzahl von Punkten bestehen. Dies lässt sich wie folgt begründen: Da das Doppelpendel aus zwei gekoppelten Pendeln besteht, sind regelmäßige Bewegungen mit Ausnahme der einfachen periodischen Bewegungen (gegensinnige Schwingung und Schwebung) immer Überlagerungen zweier periodischer Bewegungen mit verschiedenen Frequenzen. Sind die Frequenzen kommensurabel, d.h. ist deren Verhältnis rational, so ist die resultierende Bewegung periodisch. Sind sie inkommensurabel, d.h. ist deren Verhältnis irrational, so ist die Bewegung quasiperiodisch (so ist Quasiperiodizität definiert). Da wir die Anfangsbedingungen unabhängig von diesen Frequenzen wählen, die wir ohnehin nicht berechnen können, liegen den via Simulation erzeugten Poincaré-Schnitten quasi zufällige Frequenzen zugrunde. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass wir durch die Wahl der Anfangsbedingungen kommensurable bzw. inkommensurable Frequenzen treffen aus den Mächtigkeiten der Mengen der rationalen bzw. irrationalen Zahlen. Die Mächtigkeit der rationalen Zahlen ist mit $\aleph_0$ kleiner als die der irrationalen Zahlen ($\aleph_1$). Deswegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine periodische

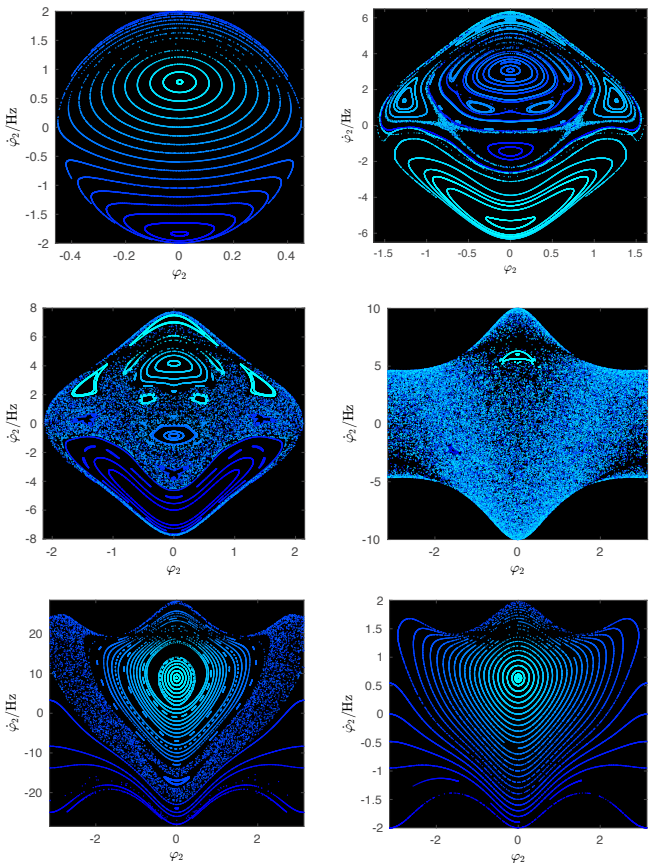

Abb 2: Poincaré-Schnitte bei $R \to \infty$ bei $E_{tot} = 1$ J (oben links), $E_{tot} = 10$ J (oben rechts), $E_{tot} = 15$ J (Mitte links), $E_{tot} = 25$ J (Mitte rechts), $E_{tot} = 200$ J (unten links) und $E_{tot} \to \infty$ (unten rechts, simuliert mit $E_{tot} = 1$ J und g = 0)

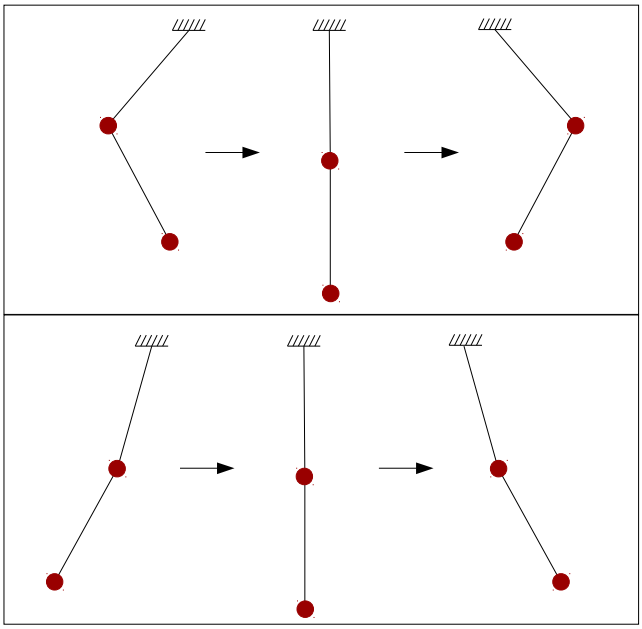

Abb. 3: Darstellung einer Dreiviertelperiode der gegensinnigen Schwingung (oben) und der Schwebung (unten).

Bewegung treffen gleich Null und wir sehen nur die quasiperiodischen Poincaré-Schnitte in den Abbildungen.

Wir wollen nun analysieren, wie sich das Verhalten des Doppelpendels bei Erhöhen der Energie verändert. Bereits bei E_{tot} = 10 J sind mehrere entscheidende Veränderungen erkennbar. Zum einen nimmt die Anzahl der Gruppen von verschiedenen konzentrisch zueinander liegenden Poincaré-Schnitten zu. Also nimmt die Zahl der verschieden Modi der Bewegung zu. Die Poincaré-Schnitte um die leicht verschobenen Eigenzustände bleiben zwar in etwas deformierter Form erhalten, zusätzlich sind jedoch neue Gruppen entstanden. Des Weiteren treten erstmalig auch chaotische Bewegungen auf. Diese sind als Bänder erkennbar, auf denen scheinbar zufällig verteilte Punkte liegen. Bereits bei E_{tot} = 15 J verdrängen die Gebiete chaotischer Bewegungen zunehmend die der periodischen und quasiperiodischen. Bei E_{tot}= 25 J gibt es nur noch einen kleinen Bereich periodischer und quasiperiodischer Bewegungen, der bei höheren Energien schließlich verschwindet. Wir würden nun vermuten, dass sich die Situation bei weiterer Steigerung der Energie nicht verändert. Das ist jedoch nicht der Fall. Liegt die Gesamtenergie bei E_{tot} = 200 J, hat sich in dem Chaos neue Ordnung formiert. Bei weiterer Steigerung der Energie nimmt der Anteil an chaotischen Bewegungen weiter ab. Da die potentielle Energie des Systems aufgrund des fixen Aufhängepunkts beschränkt ist, die kinetische Energie aber nicht, besitzt das Doppelpendel im Grenzfall $E_{tot} \to \infty$ quasi nur kinetische Energie. Die potentielle Energie ist in diesem Fall folglich vernachlässigbar. Somit können wir den Fall simulieren, indem wir einen beliebigen, endlichen Wert für E_{tot} wählen und die Gravitation schlichtweg ausschalten.

Wir beobachten in diesem Fall tatsächlich ausschließlich periodische und quasiperiodische Bewegungen. Alle Poincaré-Schnitte liegen konzentrisch zu einem Punkt, welcher einen der beiden Eigenzustände darstellt, der bereits bei E_{tot}= 10 J erkennbar war, der bei fast allen Energien auftrat, auch wenn er teilweise leicht verschoben war. Dieser Eigenzustand stellt bei $E_{tot} \to \infty$ die Kreisbewegung der beiden Pendelkörper und bei $E_{tot} < \infty$ die Schwebung dar. Konsultieren wir Arbeiten über das klassische Doppelpendel [4, 7, 8, 9, 14], so stellen wir fest, dass die Ergebnisse exakt mit denen des langen Doppelpendels im Fall $R \to \infty$ übereinstimmen. Das bestätigt die theoretische Vermutung, dass das in dieser Arbeit eingeführte Modell für $R \to \infty$ in das klassische übergeht. Damit ist auch die Bezeichnung "verallgemeinertes Modell" des Doppelpendels gerechtfertigt, da das klassische als Grenzfall enthalten ist. Wir wollen nun den Fall $R < \infty$ betrachten. Dabei legen wir zunächst E_{tot}=1 J fest und lassen diesen Wert konstant. In den Abbildungen 4 und 5 sind Poincaré-Schnitte zu ausgewählten Werten für R zu sehen. Für $R \geq$ 100 m sind die Poincaré-Schnitte optisch ununterscheidbar von denen des Falls $R \to \infty$. Erst ab R = 4 m können wir die ersten Veränderungen erkennen. Die obere Gruppe verzerrter, konzentrischer Ellipsen hat sich leicht ausgedehnt. Diese Ausdehnung setzt sich bei R = 3 m fort. Bei R = 2,5 m beobachten wir die erste signifikante Veränderung. Es sind Gruppen neuartiger

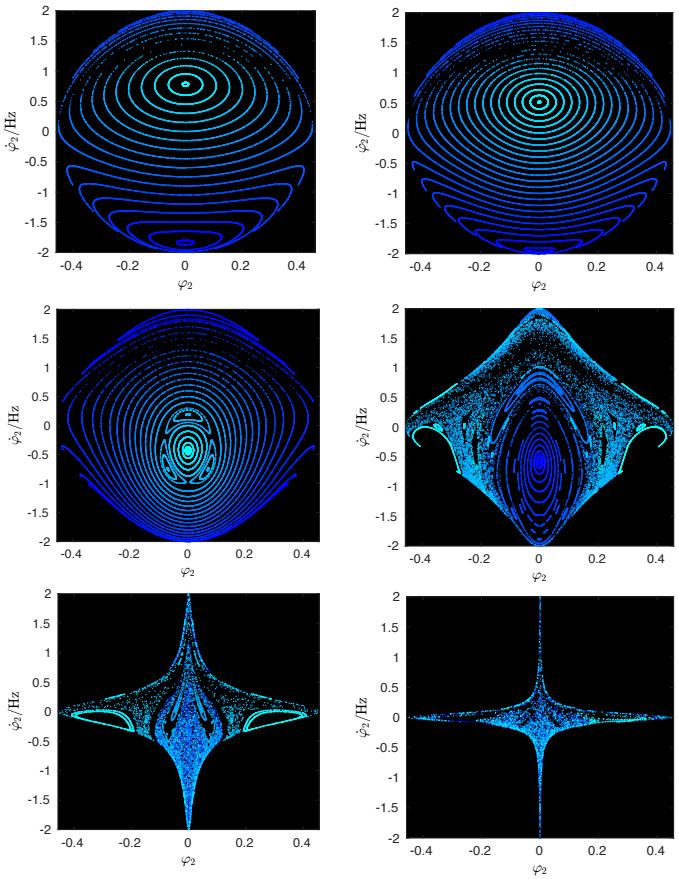

Abb. 4: Poincaré-Schnitte bei q E_{tot} = 1J mit R→ ∞ (oben links), R = 4 m (oben rechts), R = 2,5 m (Mitte links), R = 2,1 m (Mitte rechts), R = 2,01 m (unten links) und R = 2,001 m (unten rechts).

Poincaré-Schnitte, und damit neuer Bewegungskonstellationen, entstanden. Zusätzlich stellen wir fest, dass der Poincaré-Schnitt der gegensinnigen Schwingung verschwunden ist. Der Poincaré-Schnitt der Schwebung hat sich stattdessen soweit nach unten verschoben, dass die ursprüngliche Schwebung auch optisch zur gegensinnigen Schwingung wird.

Bei R = 2,1 m stellen wir das erste mal chaotische Bewegungen fest. Außerdem wird eine weitere Entwicklung deutlich. Die Begrenzung der Menge aller Poincaré-Schnitte einer Energie und einem Wert der Größe R zieht sich scheinbar zusammen. Statt von einer Ellipse wie im Falle E_{tot} = 1 J und $R \to \infty$ sind die Poincaré-Schnitte nun scheinbar von vier Hyperbeln umrandet, die sich mit fallendem R zunehmend enger an die Koordinatenachsen schmiegen. Bei R = 2,01 m sind kaum noch Poincaré-Schnitte periodischer und quasiperiodischer Bewegungen zu sehen.

Ab R = 2,001 m hat das Chaos komplett Überhand genommen. Wählen wir $R \leq (l_1+l_2)$ (in unserem Fall $R \leq$ 2 m), so befindet sich der Zentralkörper innerhalb des Radius, in dem sich die Pendelkörper bewegen können. Da der Zentralkörper diese anzieht, werden sie in den Zentralkörper stürzen und es findet keine weitere Bewegung statt (ausgenommen sind wenige Sonderfälle wie z.B. $\varphi_1 = \varphi_2 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 2 = 0$, wo das Doppelpendel aus Symmetriegründen nicht in den Zentralkörper stürzt). Zu untersuchen ist folglich nur noch der Grenzprozess $R \to (l_1+l_2)$.

Es gibt keine Möglichkeit, ihn auf ähnliche Weise zu simulieren wie den Fall $E_{tot} \to \infty$ oder $R \to \infty$. Da die Rechengenauigkeit des für diese Arbeit verwendeten Programms nur eine Erstellung von Poincaré-Schnitten bis R = 2,0001 m ermöglicht, müssen wir uns analytischer Methoden bedienen. Wir haben bereits festgestellt, dass die Begrenzung der Menge aller Poincaré-Schnitte sich bei fallendem R zu vier Hyperbeln deformiert, die sich immer enger an die Koordinatenachsen schmiegen.

Wir würden aus dieser Tendenz heraus intuitiv für $R \to (l_1+l_2)$ ein Diagramm wie in Abb. 5 (oben rechts) vermuten. Wir wollen überprüfen, ob wir mit dieser Vermutung richtig liegen, indem wir eine Funktion für die Begrenzung herleiten. Deren Verhalten im Fall $R \to (l_1+l_2)$ wollen wir anschließend untersuchen. Wir benötigen zunächst die Formel für die Gesamtenergie des Systems.

$$E_{tot} = E_{kin,1} + E_{kin,2} + E_{pot,1}(\varphi_1) + E_{pot,2}(\varphi_1, \varphi_2) \quad (23)$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2\right) + E_{pot,1}(\varphi_1) + E_{pot,2}(\varphi_1, \varphi_2) \quad (24)$$

Stellen wir diese Gleichung nach $\dot{\varphi}_2$ um und setzen die Poincaré-Bedingung $\varphi_1 = 0$ ein (und damit auch $E_{pot,1}$) (0) = 0), erhalten wir: (siehe Kasten unten Formel 25)

Wir müssen nun, um die Begrenzungsfunktion zu ermitteln, die Maximal- beziehungsweise Minimalwerte von $\dot{\varphi}_2$ in Abhängigkeit von φ_2 ermitteln. Da $\dot{\varphi}_2$bei vorgegebenen Parametern und vorgegebener Gesamtenergie außer von φ_2 nur noch von $\dot{\varphi}_1$ abhängt, müssen wir, da wir φ_2 vorgeben, die Werte von $\dot{\varphi}_1$ berechnen, bei denen φ_2 maximal beziehungsweise minimal wird. Sei nun φ_2 vorgegeben und fest. Wir setzen zur besseren Übersichtlichkeit:

$$k_1 := \frac{l_1}{l_2} \cos(\varphi_2) \quad (26)$$

$$k_2 := k_1^2 - \frac{(m_1+m_2) l_1^2}{m_2 l_2^2} \quad (27)$$

$$k_3 := 2 \frac{E_{tot} - E_{pot,2}(0, \varphi_2)}{m_2 l_2^2} \quad (28)$$

Nun lautet (25):

$$\dot{\varphi}_2 = -k_1 \dot{\varphi}_1 \pm \sqrt{k_2 \dot{\varphi}_1^2 + k_3} \quad (29)$$

Wir nutzen die notwendige Bedingung für Extremwerte.

$$0 = \frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\varphi}_1} = -k_1 \pm \frac{k_2 \dot{\varphi}_1}{\sqrt{k_2 \dot{\varphi}_1^2 + k_3}} = -k_1 \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k_2} + \frac{k_3}{k_2^2 \dot{\varphi}_1^2}}} \quad (30)$$

Umgestellt nach $\dot{\varphi}_1$ erhalten wir schließlich:

$$\dot{\varphi}_1 = \pm \sqrt{\frac{k_1^2 k_3}{k_2^2 - k_1^2 k_2}} \quad (31)$$

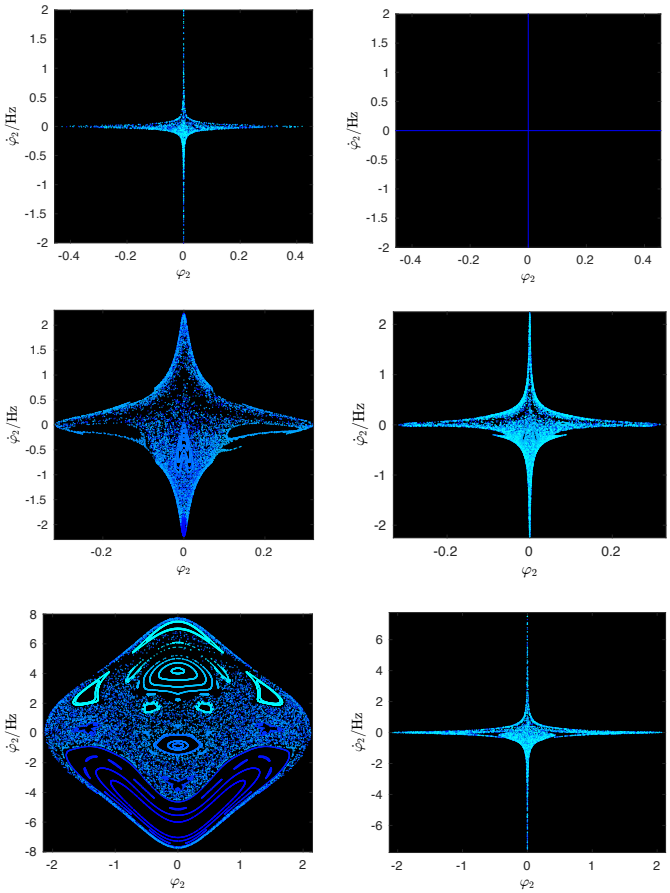

Abb. 5: Poincaré-Schnitte für E_{tot} = 1 J mit R = 2,0001 m (oben links), R → ∞ (oben rechts), R = 2,01 m bei m_1 = 0,5 kg und m_2 = 2 kg (Mitte links) und R = 2,001 m bei m_1 = 0,5 kg und m_2 = 2 kg (Mitte rechts) sowie für E_{tot} = 15 J mit R→ ∞ (unten links) und R = 2,001 m (unten rechts).

Diesen Term können wir in (25) einsetzen und erhalten damit die Funktion für die Begrenzung der Menge der Poincaré-Schnitte.

In Abb. 6 (Seite 46) sind verschiedene Grenzfunktionen zu sehen. Wir wollen nun anhand der hergeleiteten Gleichungen untersuchen, wie sich diese im Falle $R \to (l_1+l_2)$ verhält. Sei vorerst $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. In diesem Fall ist $E_{pot,1} = E_{pot,2} = 0$. Die Gesamtenergie des Systems E_{tot} teilt sich folglich auf die kinetischen Energien der Pendelkörper auf. Damit kann $\dot{\varphi}_2$ jeden beliebigen Wert zwischen $\dot{\varphi}_{2,min}$ und $\dot{\varphi}_{2,max}$ annehmen (in unserem Fall zwischen 2 s^{-1} und -2 s^{-1}. Sei nun $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ nicht erfüllt.

Dann ist mindestens eine der beiden Koordinaten von 0 verschieden. Wir betrachten, wie sich $E_{pot,2}$ (φ_1, φ_2) in diesem Fall bei $R \to (l_1+l_2)$ verhält.

$$E_{pot,2}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{G M m_2}{R - l_1 - l_2} - \frac{G M m_2}{\sqrt{(R - l_1 \cos(\varphi_1) - l_2 \cos(\varphi_2))^2 + (l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2))^2}} \quad (32)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{l_1}{l_2} \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_1 \pm \sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2} \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_1\right)^2 - \frac{(m_1+m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 E_{pot,2}(0, \varphi_2) - 2 E_{tot}}{m_2 l_2^2}} \quad (25)$$

Um untersuchen zu können, wie sich $E_{pot,2}$ verhält, müssen wir zunächst untersuchen, wie sich M verhält. Dazu betrachten wir die Gleichung (22), die hier zur besseren Nachvollziehbarkeit noch einmal angeführt wird:

$$M = \frac{E_{tot}}{Gm_2}\left(\frac{1}{R-l_1-l_2} - \frac{1}{\sqrt{(R-l_1)^2-2(R-l_1)l_2\left(1-\frac{E_{tot}}{m_2 g l_2}\right)+l_2^2}}\right)^{-1} \tag{33}$$

Ist $R = (l_1 + l_2)$ so erhalten wir für den rechten Summanden in der Klammer

$\sqrt{\frac{m_2 g}{2 l_2 E_{tot}}} < \infty$. Da $\frac{1}{R-l_1-l_2}$ für $R \to (l_1 + l_2)$

jedoch unendlich groß wird, überwiegt dieser Summand den anderen und wir können M auf

$$M = \frac{E_{tot}(R-l_1-l_2)}{Gm_2} \tag{34}$$

reduzieren. Diese Gleichung können wir nun in (32) einsetzen und erhalten:

$$E_{pot,2}(\varphi_1, \varphi_2) = E_{tot} - \frac{E_{tot}(R-l_1-l_2)}{\sqrt{(R-l_1\cos(\varphi_1)-l_2\cos(\varphi_2))^2+(l_1\sin(\varphi_1)+l_2\sin(\varphi_2))^2}} \tag{35}$$

Der Term

$$\sqrt{(R-l_1\cos(\varphi_1)-l_2\cos(\varphi_2))^2+(l_1\sin(\varphi_1)+l_2\sin(\varphi_2))^2}$$

stellt den Abstand des unteren Pendelkörpers von seiner Ruhelage dar. In dieser befindet sich der untere Pendelkörper genau dann, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ gilt. Da dies hier nicht erfüllt ist, ist der Abstand größer als 0. Damit ist der rechte Summand in Gleichung (35) für $R \to (l_1+l_2)$ definiert und gleich 0. Das bedeutet schließlich, dass falls $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ nicht erfüllt ist, $E_{pot,2}(\varphi_1, \varphi_2)$ für $R \to (l_1+l_2)$ gegen E_{tot} strebt. Das bedeutet, dass insbesondere im Fall $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 \neq 0$ der Wert $E_{pot,2}(\varphi_1, \varphi_2) = E_{pot,2}(0, \varphi_2)$ gegen E_{tot} strebt, wenn sich R dem Wert (l_1+l_2) annähert. Wenn das jedoch gegeben ist, verschwindet k_3 aus (28) und damit auch $\dot{\varphi}_1$ (siehe (31)). Setzen wir $\dot{\varphi}_1 = 0$ sowie $E_{pot,2}(0, \varphi_2) = E_{tot}$ in (25) ein, so erhalten wir schließlich $\dot{\varphi}_2 = 0$ Damit ist die Abb. 5 (oben rechts) als Grenzfall für $R \to (l_1+l_2)$ bestätigt. Die Poincaré-Schnitte konvergieren somit gegen zwei Geraden, wenn sich R demWert (l_1+l_2) nähert.

Das erweckt den Anschein, dass in diesem Falle tatsächlich die Bewegung wie bei der Steigerung der Energie zwar erst chaotisch ist, im Grenzfall jedoch ausschließlich periodisch beziehungsweise quasiperiodisch ist. Das folgt aber nicht zwingend daraus, da es sich auch um eine ebene Punktwolke handeln könnte, die senkrecht zu dem betrachteten Unterraum des Phasenraums steht.

Des Weiteren wirft die Beweisführung Zweifel auf, dass sich das Doppelpendel im Prozess der Annäherung im noch nicht untersuchten Bereich ($R < 2{,}0001$ m) je periodisch oder quasiperiodisch bewegt. Diese Zweifel bestehen

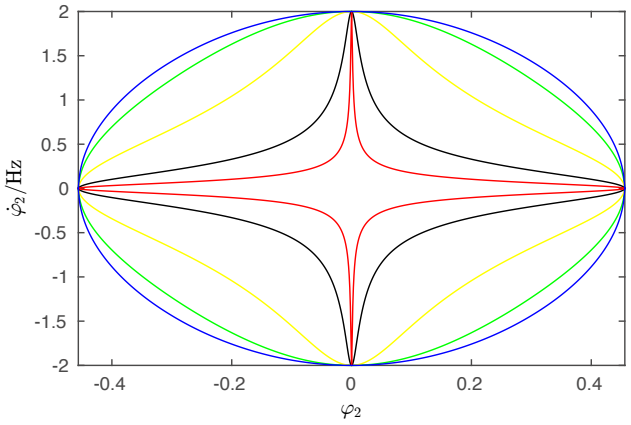

Abb. 6: Begrenzung der Menge aller Poincaré-Schnitte bei E_{tot} = 1J und $R \to \infty$ (blau), R = 2,5 m (grün), R = 2,1 m (gelb), R = 2,01 m (schwarz) und R = 2,001 m (rot).

in folgender Überlegung: Wenn für R-Werte nahe (l_1+l_2) die potentielle Energie des unteren Pendels sofort auf die Gesamtenergie E_{tot} springt, sobald $\varphi_1 \approx 0 \approx \varphi_2$ nicht mehr erfüllt ist, verschwinden, wie gezeigt, die Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ automatisch. Hier ist folglich mit einer sprunghaften Zustandsänderung zu rechnen, die eine periodische oder quasiperiodische Bewegung in einem gekoppelten System nicht begünstigt.

Wir wollen diesen Gedankengang mit weiteren Simulationen im folgenden Abschnitt verifizieren. Vorher wenden wir uns noch zwei weiteren Aspekten zu, die wir anhand der Poincaré-Schnitte untersuchen können. Bisher haben wir stets die Standardparameter $l_1 = l_2 = 1$ m und $m_1 = m_2 = 1$ kg verwendet. Uns soll es nun darum gehen, die Massen der Pendelkörper zu variieren und die auftretenden Effekte zu erklären. Bei $E_{tot} = 1$J und $R = 2{,}01$ m haben wir bisher hauptsächlich chaotische Bewegungen finden können (vergleiche Abb. 4 (unten links)). Dies verändert sich jedoch, wenn wir $m_1 = 0{,}5$ kg und $m_2 = 2$ kg wählen (vergleiche Abb. 5 (mitte links)). Wir beobachten hier neben chaotischen zusätzliche periodische und quasiperiodische Bewegungen. Diese sind zum einen in der Mitte der Abbildung auf der rechten und linken Seite angedeutet sowie im Zentrum des Plots. Bei Vergrößerung sind auch in der unteren Spitze der Figur einige deformierte Ellipsen erkennbar (in der Abbildung sichtbar als dunkelblauer Streifen).

Nun drängt sich natürlich die Frage auf, warum wir diese zusätzlichen periodischen und quasiperiodischen Bewegungen beobachten. Dies lässt sich anhand der eben betrieben Analysen erklären. Wir haben hergeleitet, dass die potentielle Energie des unteren Pendelkörpers rasch gegen die Gesamtenergie strebt, sobald die Auslenkungen der Pendel nicht mehr klein sind. Durch die Wahl der Massen ist jetzt das untere Pendel träger.

Das führt dazu (beziehungsweise scheint dazu zuführen), dass bei bestimmten Anfangsbedingungen die Sprünge in der Energie, die sich, wie gezeigt, auch auf die Koordinaten übertragen, so stark abgeschwächt werden, dass quasiperiodische und periodische Bewegungen möglich werden. Deswegen erkennen wir in den für die Schwebung und die

gegensinnige Schwingung (siehe Abb. 3) typischen Gebieten verzerrte Ellipsen (Linienzüge).

Wir wählen nun erneut m_1 = 0,5 kg und m_2 = 2 kg jedoch nun R = 2,001 m. Die dazugehörigen Poincaré-Schnitte sind in Abb. 5 (mitte rechts) zusehen. Hier sind die Bereiche, in denen es periodische und quasiperiodische Bewegungen gab, bereits fast vollständig verschwunden. Die Änderung der Parameter kann die Tendenz des zunehmenden Chaos mit fallendem R folglich nicht vollständig stoppen. Zwar könnten wir m_1, l_1 oder l_2 gleich Null setzen und damit ein Pendel vom anderen entkoppeln. Es bliebe nur noch ein einfaches Pendel übrig, was sich aufgrund der Spiegelsymmetrie des Gravitationsfeldes periodisch bewegen muss. Möchten wir uns auf diese Sonderfälle jedoch nicht einlassen, also stets ein Doppelpendel im engen Sinn und kein entartetes Doppelpendel betrachten, so lässt sich das Chaos durch Veränderung dieser Parameter nicht verhindern, sondern nur hinauszögern.

Wir haben uns bis jetzt im Wesentlichen nur damit beschäftigt, wie sich die Bewegung des Doppelpendels verändert, wenn wir $R \to \infty$ wählen und die Gesamtenergie des Systems E_{tot} verändern oder wenn wir E_{tot} wählen und R verändern. Damit wird natürlich nicht automatisch klar, was bei anderen Kombinationen von Werten für E_{tot} und R passiert. Es ist jedoch nicht notwendig, weitere mögliche Beispiele zu analysieren, wenn wir das in Abb. 5 (unten links und rechts) betrachten. Wir sehen Poincaré-Schnitte zur Energie E_{tot} = 15 J. In der linken Abbildung wurde $R \to \infty$ gewählt und in der rechten R = 2,001 m. Hier beobachten wir genau die Tendenz, die wir bereits bei E_{tot} = 1 J entdeckt haben: Unabhängig davon, ob das klassische Doppelpendel bei einer Energie „harmonisch" oder chaotisch schwingt, verkleinern wir R bis an den Grenzwert (l_1+l_2) bewegt sich das Doppelpendel immer chaotischer. Aufgrund dieser Erkenntnis ist es nicht notwendig, noch weitere Beispiele heranzuziehen.

2.3 Lyapunov-Exponent

Systeme wie das lange Doppelpendel, welche durch Koordinaten beschrieben werden, die in einem Vektor $\vec{x}$ zusammengefasst werden können und deren zeitliche Entwicklung $\vec{x}$ (t) in Abhängigkeit von dem Anfangszustand $\vec{x}_0$ durch ein Differentialgleichungssystem der Art $\dot{\vec{x}}$ (t) = f(t,$\vec{x}$ (t)) ermitteln lässt, werden als dynamische Systeme bezeichnet. Für diese führte der russische Physiker und Mathematiker Aleksandr Lyapunov einen Wert ein, mit dem wir uns näher beschäftigen wollen.

Definition 2:
Sei x (t,x_0) die zeitliche Entwicklung eines eindimensionalen dynamischen Systems mit der Anfangsbedingung x_0. Der Wert

$$\lambda_{x_0} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\ln\left(\left|\frac{\partial x(t,x_0)}{\partial x_0}\right|\right)\right) \tag{36}$$

heißt Lyapunov-Exponent [5, 15]. Anhand der Größe des Lyapunov-Exponents können wir dem System verschiedene Eigenschaften zuordnen. Ist $\lambda_{x0} > 0$,

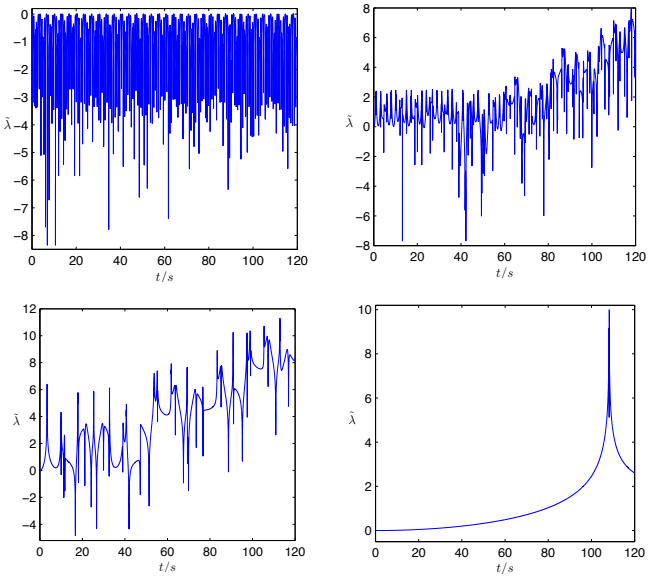

Abb. 7: $\tilde{\lambda}_{\varphi 2}$) in Abhängigkeit von der Zeit t für R = 4m (oben links), R = 2,1m (oben rechts), R = 2,01m (unten links) und R = 2,00001m (unten rechts).

so ist das System divergent, also instabil. Ist $\lambda_{x0} < 0$, so ist das System dissipativ oder stabil. Die Definition 2 lässt sich auch auf das Doppelpendel mit seinen vier Koordinaten übertragen, indem wir Anfangsbedingungen für φ_1, φ_2, $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ vorgeben, aber nur die zeitliche Entwicklung einer Koordinate betrachten. Für numerische Analysen wird die partielle Ableitung in Gleichung (36) häufig durch

$$\frac{x(t,x_0+\delta)-x(t,x_0)}{\delta} \tag{37}$$

mit einem kleinen $\delta > 0$ genähert. Außerdem wird statt dem Grenzwert meist nur die zeitliche Entwicklung des Wertes

$$\frac{1}{t}\ln\left(\left|\frac{x(t,x_0+\delta)-x(t,x_0)}{\delta}\right|\right) \tag{38}$$

betrachtet. Da die Koordinaten des Doppelpendels bei E_{tot} = 1 J beschränkt sind, so ist übertragen auf diese zwangsweise auch die Differenz $x\,(t,x_0+\delta)-x\,(t,x_0)$ beschränkt, was bedeutet, dass der Term (38) für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Da besonders das Vorzeichen des Lyapunov-Exponenten entscheidend ist und der Faktor $\frac{1}{t}$ in (38) dieses nicht verändert, genügt es bei beschränkten Koordinaten die zeitliche Entwicklung von

$$\ln\left(\left|\frac{x(t,x_0+\delta)-x(t,x_0)}{\delta}\right|\right) \tag{39}$$

zu betrachten. Wir wählen nun $\varphi_1(0)= \dot{\varphi}_1(0)= \dot{\varphi}_2(0)= 0$ und φ_2 = 0,45545. Damit ist E_{tot} = 1 J. Des Weiteren sei $\delta = 10^{-5}\ s^{-1}$. Wir führen eine Simulation mit diesen Werten durch und eine zweite mit $\dot{\varphi}_2(0)= \delta = 10^{-5}\ s^{-1}$ und plotten den Wert

$$\tilde{\lambda} := \ln\left(\left|\frac{\dot{\varphi}_2(t,\delta)-\dot{\varphi}_2(t,0)}{\delta}\right|\right) \tag{40}$$

in Abhängigkeit von der Zeit. In Abb. 7 sind die grafischen Ergebnisse der Simulationen zusehen. Bei R = 4 m gilt stets $\tilde{\lambda} < 0$. Da es im System keine Reibung gibt, können wir Dissipation ausschließen. Folglich muss eine stabi-

le Trajektorie vorliegen. Bei einem Doppelpendel können wir davon ausgehen, dass eine solche gleichzusetzen ist mit einer periodischen oder quasiperiodischen Bewegung. Wählen wir R = 2,1 m, so liegt $\tilde{\lambda}$ anfänglich hauptsächlich zwischen 0 und 2, wächst dann jedoch immer stärker an (die Ausreißerwerte kleiner 0 kommen an den Umkehrpunkten zustande). Es handelt sich damit um eine instabile Trajektorie, also eine chaotische Bewegung. Für R = 2,01 m wächst $\tilde{\lambda}$ noch schneller. Die Trajektorie ist damit quasi noch instabiler als die bei R = 2,01 m. Da $\dot{\varphi}_{2,\min} = 2s^{-1}$ und $\dot{\varphi}_{2,\max} = -2s^{-1}$, gilt ist $\tilde{\lambda}_{\max} = \ln\left(\frac{4s^{-1}}{10^{-5}s^{-1}}\right) \approx 12.9$. Bei t ≈ 115 s wird somit sogar fast das Maximum von $\tilde{\lambda}$ erreicht. Bei R = 2,00001 m erkennen wir scheinbar eine gegenläufige Tendenz. Für $0 \leq t \leq 50$ s ist $\tilde{\lambda} \approx 0$ auch wenn der Wert leicht ansteigt. Demzufolge können wir noch nicht entscheiden, ob sich das System stabil oder instabil verhält. In dieser Zeit hat im Wesentlichen nur die Auslenkung φ_2 abgenommen (die Schwingungsdauer ist mit fallendem R angewachsen). Der untere Pendelkörper nähert sich langsam dem Zentralkörper. Bei t ≈ 105 s befindet er sich schließlich in seiner unmittelbaren Nähe. Diese Feststellung bestätigt die Hypothese im vorherigen Abschnitt, dass der sprunghafte Übergang von $\varphi_1 \approx 0 \approx \varphi_2$ zu von 0 verschiedenen Auslenkungen zu dem chaotischen Verhalten des Doppelpendels führt, denn genau bei diesem Übergang wird die Instabilität des Systems deutlich.

3 Zusammenfassung

Mit dem langen Doppelpendel wurde eine Verallgemeinerung des klassischen Doppelpendels eingeführt, da es dieses als Grenzfall enthält. Theoretische und numerische Untersuchungen haben gezeigt, dass die Annäherung des Doppelpendels an den Zentralkörper dessen Bewegungsfreiheit zwar immer weiter einschränkt, jedoch das System immer instabiler wird, woraus eine chaotische Bewegung resultiert. Außerdem zeigte sich, dass die gegensinnige Schwingung und die Schwebung, die im klassischen Modell strikt getrennt voneinander auftreten, beim langen Doppelpendel ineinander über gehen.

Danksagung

Ich danke Dr. David Wenzel vielmals für seine Unterstützung. Er brachte mir mit unermüdlichem Eifer und Scharfsinn die Grundzüge der Mathematik und die Tools zur Bearbeitung von Problemen in der theoretischen Physik bei. Erst dadurch wurde es mir möglich, die Grundideen dieser Arbeit zu entwickeln und umzusetzen.

Quellenverzeichnis

[1] Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik 1. Springer-Verlag, 2013.

[2] Landau, L. D. und E. F. Lifschitz: Mechanik. Vieweg, 1970.

[3] Fließbach, Torsten: Mechanik. Springer-Verlag, 2009.

[4] Korsch, Hans, Hans-Jörg Jodl und Timo Hartmann: Chaos. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[5] Grüne, Lars und Oliver Junge: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Seiten 1–7 sowie 73–88. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

[6] Richter, Peter: Reguläre und chaotische Bewegung in der klassischen Mechanik. GAMM-Mitteilungen 22:1, S. 73-103, 1998.

[7] Brunner, Lukas: Lösung des ebenen Doppelpendels. Vorlesung, Universität Graz, 2012.

[8] Rafat, M. Z., M. S. Wheatland und T. R. Bedding: Dynamics of a double pendulum with distributed mass. American Journal of Physics, 2009.

[9] Srivastava, N.: Einführung in die nichtlineare Dynamik. Vorlesung, TU Dortmund, 1990.

[10] Bugner, Marcus: Angetriebenes Pendel und Doppelpendel. Vorlesung, Universität Jena, 2010.

[11] Windisch, Andreas: Projekt für Computerorientierte Physik. Seminar, Universität Graz, 2008.

[12] MacKay, David: Dynamics Handout 7. Vorlesung, University of Cambridge, 2000.

[13] Giglberger, Stephan: Gekoppelte Pendel. Praktikumsversuch, Universität Regensburg, 2012.

[14] Stolze, Joachim: Nichtlineare Dynamik und Chaos. Vorlesung, TU Dortmund, 2005.

[15] Melcher, Andreas: Numerische Berechnung der Lyapunov-Exponenten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 2003.