Alexander Allin, *1998
Isabella Käming, *1999
Elias Schecke, *1997

Schule:
Albert-Schweitzer-Gymnasium, Erfurt

Eingang der Arbeit:
Juni 2016

Zur Veröffentlichung angenommen:
August 2016

Verräterische Schatten

Rekonstruktion eines Würfels im Raum mithilfe seiner Schattenbilder

Wenn Fehlerstellen im Innern von Objekten mittels Computertomografie analysiert werden, muss man aus ihrer Lage in einem Bild auf ihre Lage im Raum Rückschlüsse ziehen. Unser Ziel war es, als Grundlage dafür Wege zur Bestimmung der Lage eines Objekts im Raum zu finden. Wir konnten eine geometrische Konstruktion entwickeln, mit welcher uns diese exakte Bestimmung für den Würfel möglich ist.

1 Einleitung

Die im Jahr 1895 entdeckte Röntgenstrahlung hat heutzutage eine Vielzahl von Anwendungen. So ist sie durch ihre Verwendung für die medizinische Diagnostik wohlbekannt. Auch in der Industrie wird Röntgentechnik vielfältig eingesetzt. So werden beispielsweise Gussteile wie Kolben, Zylinderköpfe und Klimakompressoren auf innenliegende Fertigungsfehler zerstörungsfrei geprüft, um die Funktionstüchtigkeit der Teile zu gewährleisten.

Bei einer solchen industriellen Computertomografie befindet sich das zu untersuchende Objekt auf einem Drehteller, während Quelle und Detektor statisch gehalten sind. Mithilfe dieses Aufbaus werden Röntgenbilder des Objekts aus einer Vielzahl von Blickwinkeln aufgenommen. Aus diesen Aufnahmen lässt sich anschließend ein 3D-Modell des Objekts erstellen. Verrutscht oder verwackelt das Objekt während der Aufnahme der Röntgenbilder, so führt dies zu Fehlern in dem berechneten 3D-Modell. Um diese Fehler zu eliminieren, wird zum einen versucht, das Verrutschen zu minimieren, indem die Geschwindigkeit der Drehscheibe begrenzt wird. Zum anderem sucht man nach effizienteren Wegen zur Lagebestimmung des Objekts anhand der Röntgenbilder. Eine gute Übersicht über derzeitige Verfahren bildet dabei die Quelle [1]. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die Verfahren, die sich auf „back-projection“ oder „reconstruction“ stützen, jeweils einen kompletten Datensatz an Röntgenbildern benötigen, also Aufnahmen aus allen Blickwinkeln. Um aber eine Verschiebung des Objekts bereits während der Aufnahmen detektieren zu können, ist im Gegensatz dazu eine Lagebestimmung aus nur einzelnen Aufnahmen erforderlich. Bestehende Methoden, die sich der Lagebestimmung aus Einzelaufnahmen widmen, werden in den Quellen [2] und [3] erklärt. Sie stützen sich dabei jedoch auf ein Verfahren, bei dem das Röntgenbild des Körpers für viele verschiedene Translationen und Drehungen simuliert wird. Aus diesem Satz an Bildern wird dann die Lage ausgewählt, deren simuliertes Röntgenbild dem tatsächlichen am ähnlichsten ist. Dies ist in den meisten Fällen aber sehr rechenaufwendig und damit zeitintensiv. Ein Verfahren, das eine schnelle Lösung für dieses Problem bietet, ist damit noch nicht vorhanden.

In unserem Projekt möchten wir uns dieser Problematik widmen und dabei eine Lösungsstrategie entwickeln, die sich von den eben genannten Methoden unterscheidet. Wir betrachten dabei die Durchstrahlungsbilder vereinfacht als Schattenwürfe und werten deren Konturen aus. Die tatsächlichen Grauwertverläufe werden von uns also nicht berücksichtigt. Damit stellt unser Projekt eine

Abstraktion des aufgezeigten realen Problems der Lagebestimmung dar. Ziel der Arbeit ist es, aus solchen Schattenbildern die Lage entsprechender Objekte zu ermitteln. Dazu werden der Schattenwurf mathematisch als Zentralprojektion modelliert und anschließend Eigenschaften dieser Abbildung untersucht. Im Folgenden wird eine von uns entwickelte Konstruktion zur Bestimmung der räumlichen Lage eines Parallelogramms aus seinem Schattenbild vorgestellt. Dieses Ergebnis soll in unserer Arbeit auf das Schattenbild des Würfels angewandt werden. Dazu wird zunächst das Schattenbild des Würfels genauer untersucht und auf Grundlage dessen ein Verfahren vorgestellt, das die Bestimmung der Lage eines Würfels anhand seines Schattenbilds erlaubt. Die Richtigkeit dieser Konstruktion soll dabei mit Hilfe der bereits gewonnenen Ergebnisse bewiesen werden.

Die Ergebnisse der Arbeit können jedoch vielfältiger eingesetzt werden als nur für Schatten von Würfeln. So stützt sich unsere Konstruktion auf Parallelogramme, sodass unsere Methode auch für den Schatten von allgemeinen Parallelepipeden anwendbar ist. Auch ließe sich die Konstruktion direkt auf Röntgenbilder anwenden, wenn in den Aufnahmen Parallelogramme aus markanten Punkten enthalten sind.

2 Grundlagen der Schattenerzeugung

In diesem Kapitel soll die in der Einleitung bereits angedeutete Schattenabbildung definiert und einige grundlegende Eigenschaften dieser aufgezeigt werden. Dazu sollen insbesondere die Bilder von Geraden, Strecken, Ebenen und Flächen im Mittelpunkt stehen.

2.1 Abbildung eines Punktes

Als eine sinnvolle geometrische Modellierung des Schattenwurfs ergibt sich:

Definition 1:
Es sei E_D eine Ebene des Raums und Z ein Punkt, der nicht in E_D liegt. Die zu E_D parallele Ebene durch Z sei E_Z. Für alle Punkte A des Raums außer jener auf E_Z sei die Abbildung $f_{Z,E}$: $\mathbb{R}^3 \setminus E_Z \longrightarrow E_D$ definiert durch:

$$f(A) = g(ZA) \cap E_D$$

Hierbei bezeichne $g(ZA)$ die Gerade durch Z und A. Ist der Bezug klar, kann die Abbildung auch mit f abgekürzt werden. Im Folgenden nennen wir E_D die Detektorebene und Z das Streckungszentrum oder die Lichtquelle.

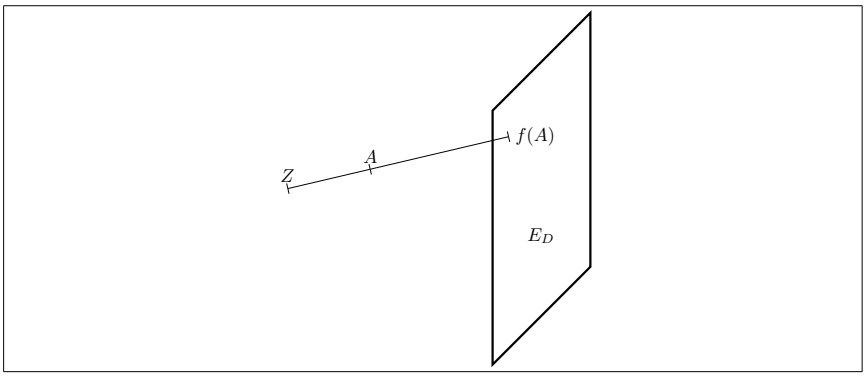

Abb. 1: Abbildung eines Punkts.

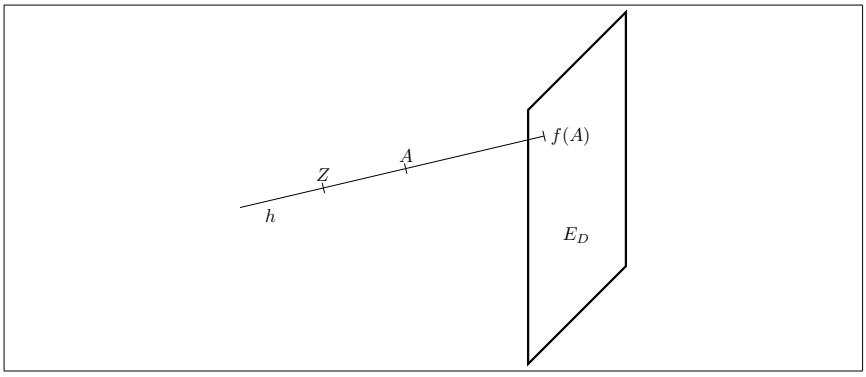

Abb. 2: Abbildung einer Gerade h mit $Z \in h$.

Wie in Abb. 1 zu sehen, wird der Punkt A mit dieser Abbildung auf den Schnittpunkt $f(A)$ der Geraden $g(ZA)$ mit der Ebene E_D abgebildet. Er markiert also den „Schatten“, den der Punkt A bei einer Lichtquelle in Z werfen würde. Im Gegensatz zum gewohnten Schattenwurf muss dabei A nicht zwischen Z und $f(A)$ liegen, sondern kann auch hinter $f(A)$ oder vor Z positioniert sein. Dieser verallgemeinerte Schattenwurf vereinfacht den Beweis bestimmter Eigenschaften des „normalen“ Schattenwurfs.

Nun liegt A nicht in E_Z, sodass $g(ZA)$ und E_D nicht parallel sein können. Weiterhin liegt $g(ZA)$ aufgrund von $Z \in E_Z$ nicht in der Ebene E_D. Folglich haben die Ebene E_D und $g(ZA)$ für jedes A im Definitionsbereich genau einen Schnittpunkt und damit genau einen Bildpunkt. Die Abbildung f ist somit wohldefiniert.

2.2 Abbildung einer Punktmenge

Im weiteren Verlauf der Arbeit soll nicht nur das Verhalten von Punkten unter der soeben definierten Abbildung betrachtet werden, sondern auch das von Punktmengen, wie zum Beispiel Geraden, Ebenen und Körpern. Dazu soll die oben definierte Abbildung nun verallgemeinert werden:

Definition 2:
Sei G eine Menge von Punkten im Raum. Dann sei $f(G)$ eine Menge von Punkten definiert durch:

$$f(G) = \bigcup_{A \in G \setminus E_Z} f(A)$$

Das Bild einer solchen Punktmenge ist also die Vereinigung der Bildpunkte der Elemente der Menge. Davon ausgenommen sind jedoch Punkte der Menge in E_Z, welche keinen Bildpunkt erzeugen. Damit stellt das entstehende Bild den „Schatten“ der Punktmenge bei einer Lichtquelle in Z dar.

2.3 Abbildung von Geraden und Strecken

Mit Definition 2 kann nun die Struktur der Bildmengen von Geraden untersucht werden. Liegt eine Gerade vollständig in der Ebene E_Z, so ist ihr Bild nach Definition 2 leer. Im Folgenden sollen deshalb nur Fälle betrachtet werden, in denen dieser Umstand ausgeschlossen ist.

Lemma 1: Sei h eine Gerade. Liegt Z auf h, dann ist $f(h)$ die Menge, die nur den Schnittpunkt von h und E_D enthält.

Beweis: Wie in Abb. 2 zu sehen, sei A ein beliebiger, von Z verschiedener Punkt auf h. Dann ist $g(ZA) = h$ und damit $f(A)$ nach Definition 1 der Schnittpunkt von h mit E_D. Somit werden alle Punkte der Gerade h dorthin abgebildet, da A frei gewählt war. $f(h)$ ist damit die Menge, die genau den Schnittpunkt von h und E_D enthält. □

Lemma 2: Es sei h eine Gerade im Raum, sodass Z nicht auf h liegt. Weiterhin sei E die Ebene, die durch Z und h aufgespannt wird, sowie h_* die Parallele zu h durch Z. Dann gilt:

$$f(h) = (E_D \cap E) \setminus h_*$$

Dieses Lemma kann durch Abb. 3 veranschaulicht werden. Das Bild der Gerade h ist prinzipiell die Schnittgerade der Ebenen E und E_D. Jedoch fehlt in bestimmten Fällen ein Punkt P im Bild, nämlich genau dann, wenn $g(ZP)$ parallel zu h ist.

Beweis: Mit den Definitionen 1 und 2 gilt $f(h) \subseteq E_D$. Weiterhin liegt für jeden Punkt A auf h die Gerade $g(ZA)$ in der Ebene E. Mit den Definitionen ergibt sich daraus $f(h) \subseteq E$. Damit gilt $f(h) \subseteq (E_D \cap E)$ Da die beiden Ebenen nicht parallel sind, ist ihr Schnitt eine Gerade.

Sei nun P ein Punkt auf dieser Schnittgerade. Aus Definition 1 folgt, dass P genau dann im Bild der Gerade h liegt, wenn $g(ZP)$ und h sich schneiden. Nun liegen h und $g(ZP)$ beide in der Ebene E. Damit ist P genau dann ein Bildpunkt, wenn $h \nparallel g(ZP)$. Weiterhin ist $g(ZP) \parallel h$ genau dann, wenn P auf h_* liegt. Damit ist P genau dann ein Bildpunkt, wenn $P \in (E_D \cap E)/h_*$. □

Wenn also $h \parallel E_D$ und $Z \notin h$ gilt, dann erhalten wir als Bild der Gerade eine Gerade auf der Detektorebene. Eine Gerade in allgemeiner Lage (sie enthält nicht Z und ist nicht parallel zu E_D) wird mit Lemma 2 also auf eine Gerade abgebildet, der ein Punkt „fehlt", wie man in Abb. 3 sehen kann. In unserer weiteren Arbeit soll diese Art der Punktmenge jedoch auch als Gerade bezeichnet werden.

Zum Abschluss des Kapitels seien noch die Bilder von Strecken betrachtet.

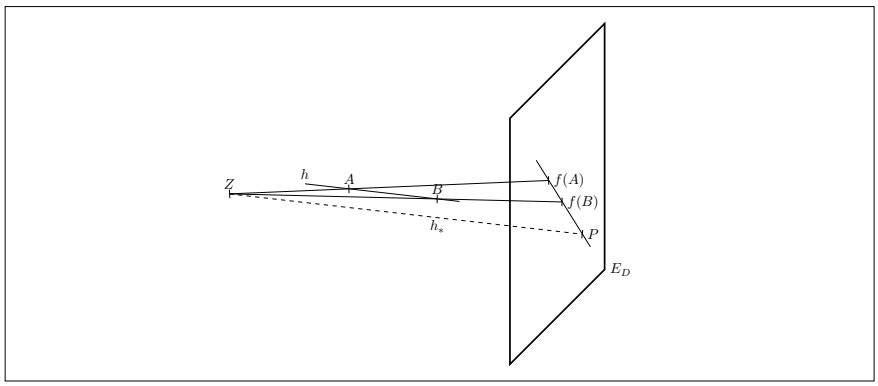

Abb. 3: Abbildung einer Gerade h mit $Z \notin h$ und $\nparallel h\ E_D$.

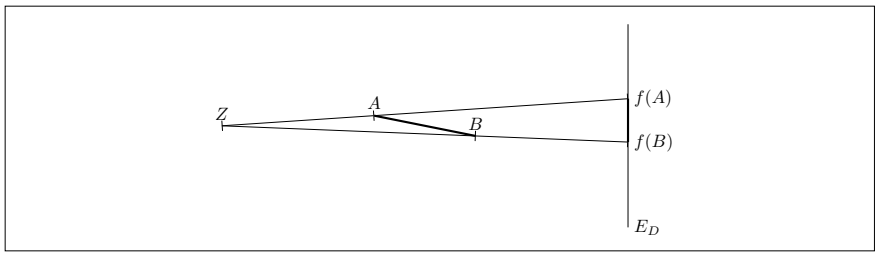

Abb. 4: Abbildung einer Strecke AB.

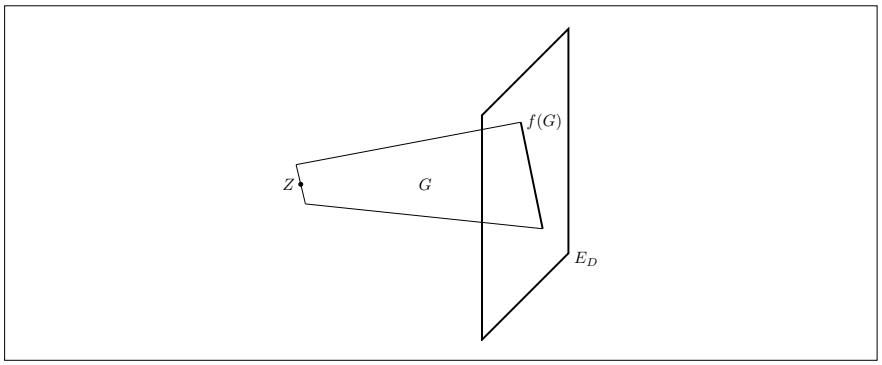

Abb. 5: Abbildung einer Ebene E mit $Z \notin E$.

Lemma 3: Sei AB eine Strecke, die vollständig im selben Halbraum bezüglich E_Z liegt wie E_D. Dann ist $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$.

Beweis: Es sei E die Ebene, in der Z, A und B liegen. Nach Definition 1 liegen dann $f(A)$ und $f(B)$ ebenfalls in E. Abbildung 4 zeigt die Lage der Punkte Z, A, B, $f(A)$ und $f(B)$ in dieser Ebene. Ist P ein Punkt auf $\overline{(AB)}$, so schneidet $g(ZP)$ offenbar $\overline{f(A)f(B)}$. Umgekehrt schneidet $g(ZP)$ für einen Punkt auf $\overline{f(A)f(B)}$ immer $\overline{(AB)}$. Damit liegt jeder Bildpunkt auf $\overline{f(A)f(B)}$ und jeder Punkt auf $\overline{f(A)f(B)}$ ist tatsächlich ein Bildpunkt. Also gilt $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$. □

2.4 Abbildung von Ebenen und Flächen

Nach den Geraden und Strecken sollen nun die Bilder von Ebenen und Flächen im Mittelpunkt stehen. Unter Beachtung der Definition 2 ist die Bildmenge der Ebene E_Z leer. Es sollen deshalb in diesem Kapitel nur Ebenen verschieden von E_Z betrachtet werden.

Lemma 4: Sei G eine Ebene, in welcher der Punkt Z liegt. Dann ist f(G) die Schnittgerade von E_D und G.

Beweis: Offenbar liegt für alle $P \in G$ die Gerade $g(ZP)$ in G. Damit müssen auch alle Bildpunkte in G liegen. Weiterhin müssen die Bildpunkte aber auch in E_D liegen. Jeder Punkt in $E_D \cap G$ liegt auch im Bild, da Punkte auf E_D auf sich selbst abgebildet werden. Nun ist $G \nparallel E_D$ (da $G \neq E_Z$) und $G \nparallel E_D$, sodass E_D und G eine Schnittgerade haben. Damit ist diese das Bild von G, wie in Abb. 5 zu sehen ist. □

Lemma 5: Sei G eine Ebene, sodass Z nicht in dieser Ebene liegt. Weiterhin sei G' die zu G parallele Ebene durch Z.

Dann ist:

$$f(G) = E_D \setminus G'$$

Beweis: Offenbar liegen alle Bildpunkte in der Ebene E_D. Sei P nun ein Punkt dieser Ebene. Mit den Definitionen 1 und 2 ist P genau dann ein Bildpunkt, wenn $g(ZP)$ und G sich schneiden. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $g(ZP) \nparallel G$. $g(ZP) \parallel G$ gilt nur, wenn P in der zu G parallelen Ebene durch Z liegt. Damit ist P genau dann ein Bildpunkt, wenn P nicht in G' liegt. Insgesamt ist also $f(G)=E_D \setminus G'$. □

Das Bild einer Ebene, die weder Z enthält noch parallel zu E_D verläuft, ist also die Detektorebene E_D, der eine Gerade fehlt. Wenn eine Ebene Z nicht enthält, allerdings parallel zu E_D ist, entfällt die Gerade fehlender Bildpunkte in der Detektorebene. Nun soll noch gezeigt werden, wie die Bilder bestimmter Flächen im Raum aussehen.

Lemma 6: Es sei ΔABC ein Dreieck, das im selben Halbraum wie E_D bezüglich E_Z liegt. Dann ist das Bild von ΔABC das, eventuell entartete, Dreieck $\Delta f(A)f(B)f(C)$.

Beweis: Sei P ein Punkt im Dreieck ΔABC. Zu zeigen ist, dass dann $f(P)$ im Dreieck $\Delta f(A)f(B)f(C)$ liegt. Wenn auf P einer der Seiten des Dreiecks liegt, so ist dies nach Lemma 3 eine richtige Aussage Liegt P im Inneren des Dreiecks ΔABC, dann gibt es eine Stecke $\overline{AQ}$, wobei Q ein Punkt auf $\overline{BC}$ ist und P auf $\overline{AQ}$ liegt. Nun wird Q wegen Lemma 3 auf einen Punkt auf $\overline{f(B)f(C)}$ abgebildet. Damit liegt jedoch $\overline{f(A)f(Q)}$ vollständig im Dreieck $\Delta f(A)f(B)f(C)$. Da aber $\overline{f(A)f(Q)}$ das Bild von $\overline{AQ}$ ist, liegt auch $f(P)$ im Dreieck $\Delta f(A)f(B)f(C)$. Also schneidet $g(ZP)$ das Dreieck $\Delta f(A)f(B)f(C)$.

Analog folgt, dass für einen Punkt P im Dreieck $\Delta f(A)f(B)f(C)$ stets ein Schnittpunkt von $g(ZP)$ mit dem Dreieck ΔABC existiert. Daraus ergibt sich, dass alle Bildpunkte im Dreieck $\Delta f(A)f(B)f(C)$ liegen und alle Punkte in diesem Dreieck Bildpunkte sind. □

Aus diesem Lemma folgt:
Lemma 7: Es sei ABCD ein Viereck, das im selben Halbraum wie E_D bezüglich E_Z liegt. Dann ist das Bild von ABCD das, eventuell entartete, Viereck $f(A)f(B)f(C)f(D)$.

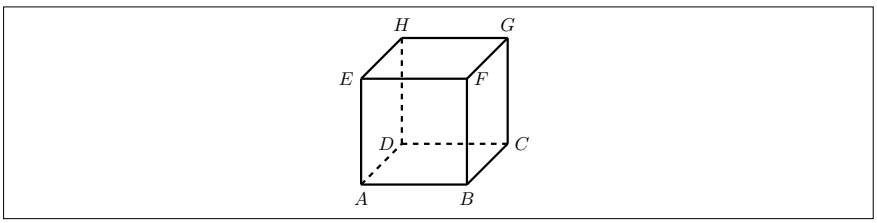

Abb. 6: Die Bezeichnung der Ecken eines Würfels.

Beweis: Das Dreieck ΔABC wird mit Lemma 6 auf $\Delta f(A)f(B)f(C)$ abgebildet und ΔACD auf $\Delta f(A)f(C)f(D)$. Folglich wird das Viereck $ABCD$ auf das Viereck $f(A)f(B)f(C)f(D)$ abgebildet. □

Mit den Ergebnissen dieses Kapitels 2 ist nun für eine Vielzahl einfacher Punktmengen wie Geraden, Strecken, Ebenen und Flächen das Aussehen des Schattenbilds bekannt. In den folgenden Kapiteln sollen diese Grundlagen zum Verständnis komplexerer Schattenbilder genutzt werden.

3 Das Schattenbild des Würfels

Um eine Rekonstruktion eines Würfels anhand seines Schattenbilds zu ermöglichen, ist es unerlässlich, die Form eines solchen Schattenbilds zu untersuchen. Im Folgenden soll dazu ein Würfel W betrachtet werden, der vollständig zwischen E_D und E_Z liegt. Das Bild $f(W)$ dieses Würfels ist damit der tatsächliche Schatten bei einer Lichtquelle in Z da jeder Punkt des Würfels zwischen der Lichtquelle und dem Detektor liegt. Die Eckpunkte von W seien wie in Abb. 6 bezeichnet. Um die Form von $f(W)$ besser beschreiben zu können, soll nun der Begriff der konvexen Hülle einer Punktmenge eingeführt werden:

Definition 3: Es sei M eine Menge von Punkten einer Ebene E. Die konvexe Hülle von M sei der Schnitt aller Halbebenen in E, die alle Punkte aus M enthalten.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass das Bild des Würfels die konvexe Hülle der Punkte $f(A), f(B),\ldots,f(H)$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass der Schatten konvex ist und außerdem keine Punkte außerhalb der konvexen Hülle enthält:

Lemma 8: Sei M eine konvexe Punktmenge, die vollständig im selben Halbraum bezüglich E_Z liegt wie E_D. Dann ist auch $f(M)$ konvex.

Beweis: Es seien A und B zwei beliebige Punkte in $f(M)$. Um zu zeigen, dass $f(M)$ konvex ist, genügt es zu zeigen, dass alle Punkte auf $\overline{AB}$ in $f(M)$ liegen. Da A und B im Bild von M liegen, gibt es zwei Punkte $X,Y \in M$, sodass $f(X)=A$ und $f(Y)=B$. Nun liegt M vollständig im selben Halbraum wie E_D bezüglich E_Z, sodass dies auch für $\overline{XY}$ gilt. Mit Lemma 3 aus Abschnitt 2.3 ist das Bild von $\overline{XY}$ die Strecke $\overline{f(X)f(Y)}=\overline{AB}$. Nun ist M aber konvex, sodass alle Punkte von $\overline{XY}$ in M liegen. Damit liegen aber auch alle Punkte des Bildes der Strecke in $f(M)$. Folglich liegt $\overline{AB}$ vollständig in $f(M)$. □

Mit diesem Lemma kann gezeigt werden:

Satz 1: Der Schatten $f(W)$ des Würfels ist die konvexe Hülle der Punkte $f(A),f(B),f(C),f(D),f(E),f(F),f(G)$ und $f(H)$.

Beweis: W ist konvex und liegt zwischen E_Z und E_D also insbesondere in derselben Halbebene wie E_D bezüglich E_Z. Mit Lemma 8 folgt, dass $f(W)$ konvex ist. Es verbleibt zu zeigen, dass $f(W)$ keine Punkte außerhalb der konvexen Hülle von $f(A), f(B),\ldots,f(H)$ enthält.

Dazu sei P ein beliebiger Punkt des Würfels. Offenbar schneidet die Gerade $g(ZP)$ mindestens eine Seitenfläche von W. Damit gibt es für jeden Punkt P einen Punkt P' auf einer der Seitenflächen, sodass $f(P)=f(P')$. Es genügt also zu zeigen, dass die Bildpunkte aller Punkte einer Seitenfläche in der konvexen Hülle liegen. Man betrachte o.B.d.A. die Seitenfläche $ABCD$.

Da W in derselben Halbebene wie E_D bezüglich E_Z liegt, trifft dies auch für das Viereck $ABCD$ zu. Mit Lemma 7 aus Kapitel 2.4 wird $ABCD$ folglich auf das Viereck $f(A)f(B)f(C)f(D)$ abgebildet. Dieses liegt vollständig innerhalb der konvexen Hülle der Punkte $f(A),f(B),\ldots,f(H)$. □

Für endliche Punktmengen M ist die konvexe Hülle stets ein konvexes Polygon, dessen Eckpunkte in M liegen.

Der Schatten von W ist also ein konvexes Vieleck, dessen Ecken Bildpunkte der Würfelecken sind. Das erscheint zunächst offensichtlich, da wir dies von Schatten aus dem alltäglichen Leben gewohnt sind. Jedoch ist der Schatten nur dann zwangsläufig ein konvexes Polygon, wenn W und E_D im selben Halbraum bezüglich E_Z liegen. Schneidet der Würfel E_Z, so ist sein Schatten zum Teil weder konvex noch begrenzt.

Man betrachte nun zwei benachbarte Eckpunkte des Polygons $f(W)$. Nach dem soeben bewiesenen Satz 1 stellen diese die Bilder zweier Eckpunkte M und N des Würfels dar. Im Folgenden soll untersucht werden, wie dann die beiden Punkte M und N zueinander liegen.

Lemma 9: Sind M und N zwei Eckpunkte von W und sind $f(M)$ und $f(N)$ benachbarte Eckpunkte im Polygon $f(W)$, so sind M und N entweder benachbarte Ecken des Würfels oder die beiden Endpunkte einer Flächendiagonale. Ist Letzteres der Fall, so liegt Z in der Ebene der zugehörigen Seitenfläche.

Beweis: Es sei E die Ebene, in der die Punkte Z, M und N liegen. Diese ist eindeutig definiert, da Z, M und N paarweise verschieden sind. E wird nach Lemma 4 aus Abschnitt 2.4 auf die Gerade $g(f(M)f(N))$ abgebildet. Da $f(W)$ konvex ist und da $f(M)$ und $f(N)$ Eckpunkte des Polygons sind, liegt $f(W)$ vollkommen auf einer Seite von $g(f(M)f(N)) = f(E)$. Demnach muss W vollständig auf einer Seite der Ebene E liegen.

Dies ist offenbar nicht möglich, wenn M und N die Endpunkte einer Raumdiagonalen von W sind. Folglich sind sie entweder die Endpunkte einer Kante oder die einer Flächendiagonalen. Angenommen, $\overline{MN}$ ist eine Flächendiagonale. O.B.d.A. sei dann $M = A$ und $N = C$. Nun soll das Quadrat $ABCD$ vollständig auf einer Seite der Ebene E liegen, die $g(AC)$ enthält. Dies ist nur möglich, wenn E das gesamte Viereck $ABCD$ enthält. Damit enthält E die Ebene, in der die zur Flächendiagonale $\overline{MN} = \overline{AC}$ gehörige Seite liegt.

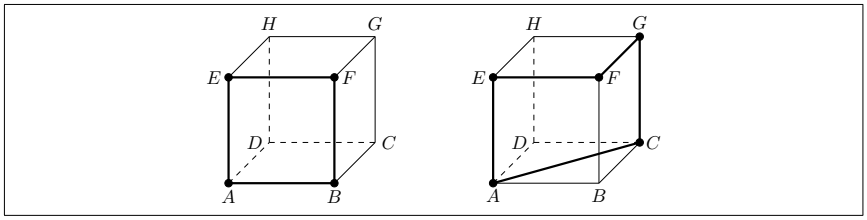

Abb. 7: Lagemöglichkeiten 1 und 2.

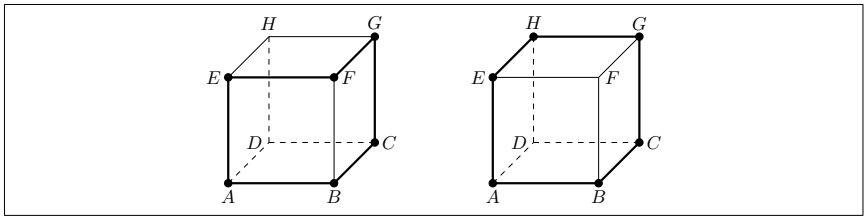

Abb. 8: Lagemöglichkeiten 3 und 4.

Da $Z \in E$ gilt, liegt Z auch in der Ebene des Vierecks $ABCD$. □

Die Ergebnisse aus Satz 1 und Lemma 9 sollen nun genutzt werden, um die Form von $f(W)$ für jede beliebige Lage von W zu bestimmen.

Satz 2. Seien $X_1,\ldots,X_k$ die Eckpunkte von $f(W)$ und $Y_1,\ldots,Y_k$ zugehörige Eckpunkte des Würfels. Die Menge der Punkte $\{Y_1,\ldots,Y_k\}$ ist dann, ausgenommen Drehung und Spiegelung des Würfels, gleich einer der folgenden:

1. $\{A,B,F,E\}$
2. $\{A,E,F,G,C\}$
3. $\{A,B,C,G,F,E\}$
4. $\{A,B,C,G,H,E\}$

Die vier Lagemöglichkeiten sind dabei der Reihenfolge nach in den Abbildungen 7 und 8 dargestellt.

Beweis: Mit „Seitenebenen" seien im Folgenden Ebenen bezeichnet, in denen die sechs Seitenflächen des Würfels liegen. Man unterscheide nun vier Fälle:

I. Z liegt in keiner Seitenebene: Da Z nach Voraussetzung in keiner Ebene einer Seitenfläche liegt, sind mit Lemma 9 alle benachbarten Eckpunkte von $f(W)$ auch Bildpunkte benachbarter Ecken des Würfels. Damit sind Y_i und Y_{i+1} nie beide in einer der Mengen $\{A,C,F,H\}$ und $\{B,D,E,G\}$, da die Punkte in diesen Mengen jeweils nicht benachbart sind. Nun müssen auch Y_1 und Y_k benachbart sein, da X_1 und X_k benachbart sind.

Da die Zugehörigkeit zu einer der Mengen zweier benachbarter Punkte unterschiedlich ist, befindet sich Y_i in einer anderen Menge als Y_k. Damit muss k gerade sein. $f(W)$ hat folglich zwei, vier, sechs oder acht Ecken. Hätte $f(W)$ zwei Ecken, so wäre es eine Strecke. Der gesamte Würfel müsste in der Ebene, die durch Z und diese Strecke bestimmt wird, liegen. Dies würde dazu führen, dass alle Seiten des Würfels in dieser Ebene enthalten wären. Somit befände sich Z in allen Seitenebenen des Würfels. Dies stellt einen Widerspruch zur Voraussetzung, Z liege in keiner der Seitenebenen, dar. Es erscheint als intuitiv klar, dass $f(W)$, das Schattenbild des Würfels, nicht acht Ecken hat. Der ausführliche Beweis dieser Tatsache würde hier jedoch zu weit führen und findet sich deshalb nicht in dieser Arbeit.

Also hat $f(W)$ vier oder sechs Ecken. Hat es vier, so müssen die zugehörigen Eckpunkte offenbar Eckpunkte einer Würfelseite sein. Damit erfüllen $Y_1,\ldots,Y_k$ die erste Lagemöglichkeit.

$f(W)$ habe nun sechs Eckpunkte. Die ersten drei Punkte aus $Y_1,\ldots,Y_k$ seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit A, B und C. Betrachtet man Abb. 8, so erkennt man, dass die Eckpunkte entweder A, B, C, G, F und E A, B, C, G, H und E sein müssen. Dies entspricht der dritten beziehungsweise der vierten Lagemöglichkeit.

II. Z liegt in genau einer Seitenebene. Es sei o.B.d.A. $ABCD$ die Seite, in deren Seitenebene Z liegt. Das Bild dieser Seitenfläche ist eine Strecke, da es sich nach Lemma 7 (siehe Abschnitt 2.4) um eine, eventuell entartete, Fläche han-

delt. Des Weiteren muss nach Lemma 4 das Bild der Seitenfläche auf einer Geraden liegen, da die Seitenebene Z enthält. Damit müssen genau zwei Eckpunkte dieser Strecke als Eckpunkte von $f(W)$ sichtbar sein. Man kann zwei Fälle unterscheiden:

i. $f(A)$ und $f(C)$ sind Eckpunkte von $f(W)$.
Da Z nur in genau einer Seitenebene liegt, müssen für alle anderen zwei benachbarten Eckpunkte von $f(W)$ die zugehörigen Eckpunkte des Würfels benachbart sein (Lemma 9). Damit bilden die zugehörigen Eckpunkte einen Kantenzug von A nach C, der nur über benachbarte Kanten führt, aber nicht D oder B enthält. Wie man beim rechten Würfel der Abb. 7 erkennen kann, wird dies nur durch die Kantenzüge $AEFGC$ und $AEHGC$ erfüllt. Beide Varianten sind durch die zweite Lagemöglichkeit beschrieben.

ii. $f(A)$ und $f(B)$ sind Eckpunkte von $f(W)$.
Wie zuvor müssen für alle anderen benachbarten Eckpunkte von $f(W)$ die entsprechenden Eckpunkte des Würfels benachbart sein. Weiterhin dürfen C und D nicht in den Kantenzügen vorkommen, da $f(C)$ und $f(D)$ auf $\overline{f(A)f(B)}$ liegen. Damit bleiben nur die Kantenzüge $AEFB$ und $AEHGFB$ übrig. An dem jeweils linken Würfel in Abb. 7 und 8 kann man erkennen, dass dies der ersten beziehungsweise dritten Lagemöglichkeit entspricht.

III. Z liegt in genau zwei Seitenebenen.
Man betrachte die beiden Seitenebenen, in denen Z liegt. Die entsprechenden Seitenebenen können offenbar nicht parallel sein, da Z im Schnitt der beiden Ebenen liegt. Ansonsten ist der Schnitt zweier Seitenebenen immer eine Gerade, die eine Würfelkante enthält. Z liege also o.B.d.A. sowohl in der Ebene von $ABCD$ als auch in der von $ABFE$. Damit liegt Z offenbar auf $g(AB)$. Die Lage der Punkte in der Ebene von $ABFE$ ist dabei in Abb. 9 dargestellt. Weiterhin liege dabei A o.B.d.A. zwischen Z und B. Da dann $g(ZA)= g(ZB)$ folgt $f(A)=f(B)$. Nun kann Z nicht auch noch in der Ebene von $BCGF$ liegen. Folglich liegt Z nicht auf $g(FB)$. Damit liegen $g(ZF)$ und $g(AE)$ in einer Ebene und sind nicht parallel. Ihr Schnittpunkt heiße F'.

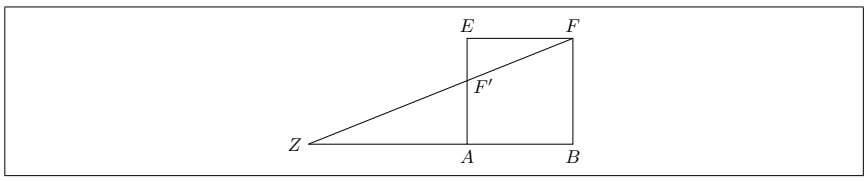

Abb. 9: Lage der Punkte in der Ebene *ABFE*.

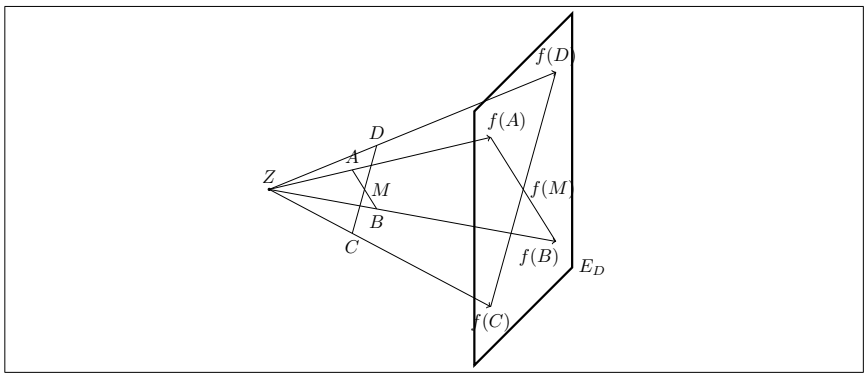

Abb. 10: Abbildung von sich schneidenden Geraden.

Da $g(AF')=g(AE)$ und $g(FB)$ parallel sind, gilt mit dem Strahlensatz:

$$\frac{|AF'|}{|ZA|} = \frac{|BF|}{|ZB|}$$

Da A zwischen Z und B liegt, gilt $|ZA|<|ZB|$. Daraus folgt $|AF'|<|FB|=|AE|$. Folglich liegt F' auf AE. Damit befindet sich aber $f(F)$ auf $f(A)f(E)$. Analog liegt $f(G)$ auf $f(A)f(H)$ und $f(C)$ auf $f(A)f(D)$.

Aus diesem Grund können F, G und C keine Eckpunkte von $f(W)$ sein. Dagegen sind $f(A)$, $f(D)$ und $f(E)$ offenbar Eckpunkte von $f(W)$.

Nun können aber $f(D)$ und $f(E)$ mit Lemma 9 keine benachbarten Eckpunkte in $f(W)$ sein, da Z nur in den Seitenebenen von $ABCD$ und $ABFE$, nicht aber in der von $ADHE$ liegt. Da $f(B)= f(A)$ gilt, bleibt nur noch $f(H)$ als Eckpunkt übrig. Damit sind die Ecken von $f(W)$ die Bilder der Punkte A, D, H und E. Diese bilden eine Seitenfläche und entsprechen so der ersten Lagemöglichkeit.

IV. Z liegt in drei oder mehr Seitenebenen.
Der Schnitt dreier verschiedener Seitenebenen ist stets ein Punkt oder leer. Da Z im Schnitt der drei Seitenebenen liegt, müssen sich die drei Seitenebenen schneiden. Der Schnittpunkt dreier solcher Ebenen ist stets ein Eckpunkt des Würfels. Folglich müsste Z auf dem Würfel liegen. Damit liegt der Würfel jedoch nicht vollständig auf einer Seite von E_Z - ein Widerspruch zu den Lagebedingungen von W.

Da Satz 2 für alle möglichen Fälle gilt, gilt er im Allgemeinen. □

Zusammenfassend konnten wir in diesem Kapitel beweisen, dass $f(W)$ ein Polygon ist, dessen Eckpunkte Bilder von Eckpunkten von W sind. Weiterhin ist nun gezeigt, dass diese Eckpunkte des Würfels auf nur vier verschiedene Weisen auf dem Würfels angeordnet sein können. Damit ist die Form und Struktur von $f(W)$ vollständig bekannt

4 Bestimmung der räumlichen Lage anhand des Schattenbilds

In diesem Kapitel sollen nun weitere Aspekte der in Kapitel 2 definierten Schattenabbildung betrachtet werden. Dabei wurde bereits in dem vorangegangenen Kapitel für einige spezielle Punktmengen geklärt, wie das Schattenbild dieser aussieht. Die dort gewonnenen Erkenntnisse sollen nun angewendet werden, um aus dem Schattenbild einer bekannten Punktmenge deren Lage im Raum zu ermitteln. Dazu soll in 4.1 zunächst ein Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe vorgestellt werden und dieser dann in Kapitel 4.2 auf den Würfel angewendet werden.

4.1 Ansatz zur Bestimmung der räumlichen Lage

In diesem Abschnitt soll eine Möglichkeit gefunden werden, wie aus dem Bild bestimmter Objekte auf deren Lage im Raum geschlossen werden kann. Dazu

seien Z, E_D und E_Z wie gewohnt definiert. Weiterhin seien A, B, C und D paarweise verschiedene Punkte einer Ebene, die nicht den Punkt Z enthält. Damit die Bildpunkte $f(A)$,$f(B)$,$f(C)$,$f(D)$ existieren, liege keiner der vier Punkte in E_Z.

Lemma 10: Es sei M der Schnittpunkt von $g(AB)$ und $g(DC)$. Liegt M nicht in E_Z, schneiden sich die Geraden $g(f(A)f(B))$ und $g(f(C)f(D))$ in $f(M)$.

Beweis: Abb. 10 veranschaulicht die Lage der Punkte im Raum. Da Z nicht in derselben Ebene liegt wie A, B, C und D, liegt Z auch weder auf $g(AB)$ noch auf $g(CD)$. Mit Lemma 2 aus Kapitel 2.3 sind damit die Bilder der beiden Geraden wiederum Geraden. Insbesondere liegen $f(A)$ und $f(B)$ bzw. $f(C)$ und $f(D)$ auf diesen Geraden. Damit sind $g(f(A)f(B))$ und $g(f(C)f(D))$ tatsächlich die Bildgeraden von $g(AB)$ und $g(CD)$. Da M sowohl auf $g(AB)$ und $g(CD)$ liegt, muss dann $f(M)$ im Bild beider Geraden, also auf $g(f(A)f(B))$ und $g(f(C)f(D))$, liegen. Da Z nicht in der durch die Punkte A, B, C und D aufgespannten Ebene liegt, ist die durch Z, A und B aufgespannte Ebene verschieden von der durch Z, C und D aufgespannten. Mit Lemma 2 (vergleiche Abschnitt 2.3) folgt, dass die Geraden $g(f(A)f(B))$ und $g(f(C)f(D))$ nicht identisch sind. Da sie aber den gemeinsamen Punkt $f(M)$ haben, müssen sie sich wie behauptet in $f(M)$ schneiden. □

Wie im Lemma sei M der Schnittpunkt von $g(AB)$ und $g(CD)$, wobei M nicht in der Ebene E_Z liege. Nach Definition 1 sind Z, M und $f(M)$ kollinear. Man betrachte darum die zentrische Streckung an Z, die M auf $f(M)$ abbildet. Die Bilder von A, B, C und D bei dieser Streckung seien A', B', C' und D'.

Lemma 11: Das Spiegelbild der Geraden $g(ZB)$ an dem Punkt $f(M)$ heiße h. Halbiert M die Strecke $\overline{AB}$, so schneiden sich $g(ZA)$ und h in A'.

Beweis: Da M die Strecke $\overline{AB}$ halbiert, folgt aus den bekannten Eigenschaften der Streckung, dass $\overline{A'B'}$ von $f(M)=M'$ halbiert wird. Bei einer Punktspiegelung an $f(M)$ wird damit B' auf A' abgebildet.

Da aber $B' \in g(ZB)$, liegt der Punkt A' auf der Geraden h. Weiterhin gilt $g(ZA) \nparallel g(ZB) \parallel h$, sodass $g(ZA)$ und h nicht identisch sind. Damit ist ihr gemeinsamer Punkt A' tatsächlich ein Schnittpunkt. □

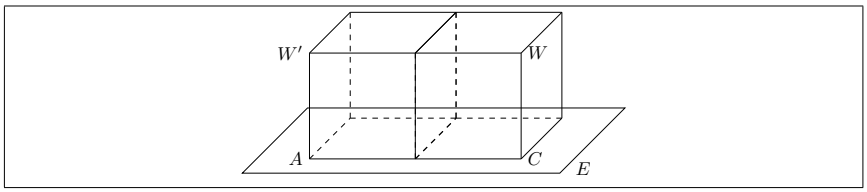

Abb. 11: Lagemöglichkeiten des Würfels bei gegebener Seitenfläche.

Mithilfe dieser beiden Lemmata kann nun die Hauptaussage dieses Kapitels formuliert werden. Dazu seien die Punkte A, B, C, D und M definiert wie oben. Weiterhin halbiere M sowohl $\overline{AB}$ als auch $\overline{CD}$. Schneidet man nun $g(f(A)f(B))$ mit $g(f(C)f(D))$, so erhält man nach Lemma 10 den Punkt $f(M)$. Nun ist die Gerade $g(ZA)$ nach Definition 1 identisch mit $g(Zf(A))$. Genauso ist $g(ZB)=g(Zf(B))$. Spiegelt man also $g(Zf(B))$ an $f(M)$, so schneiden sich die Bildgerade und $g(Zf(A))$ nach Lemma 11 in A'. Analog können B', C' und D' konstruiert werden.

Demnach ist es in der gegebenen Situation mit dieser Methode möglich, nur anhand der Lage von $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$, die Lage der Punkte A, B, C und D, bis auf Streckung an Z, zu ermitteln. Eine genauere Bestimmung ist nur anhand dieser Informationen auch nicht möglich, da alle Bilder der Punkte A, B, C und D unter Streckung an Z ebenfalls sowohl den obigen Bedingungen genügen als auch den selben Schatten werfen. Ist jedoch weiterhin die Länge einer der Strecken $\overline{AB}$ oder $\overline{CD}$ bekannt, so können die Punkte A', B', C' und D' an Z mit dem Streckungsfaktor

$$\pm\frac{|AB|}{|A'B'|} \text{ bzw. mit } \pm\frac{|CD|}{|C'D'|}$$

gestreckt werden. Dadurch erhält man die Lage der Punkte bis auf Punktspiegelung an Z. Diese Art der Rekonstruktion soll im folgenden Kapitel auf den Würfel angewandt werden.

4.2 Rekonstruktion des Würfels anhand des Schattenbilds

Wie bereits angedeutet, wollen wir nun erklären, wie sich die Lage des Würfels aus seinem Schattenbild rekonstruieren lässt. Dazu betrachten wir den Würfel W, der, wie in Kapitel 3 beschrieben, im Raum liegt. Zunächst soll dabei untersucht werden, wie eine solche Konstruktion funktioniert, falls die Bilder bestimmter Würfelecken gegeben sind. Als erstes sollen dabei die Bilder von Eckpunkten einer Seitenfläche bekannt sein. O.B.d.A. sei diese Seitenfläche das Viereck $ABCD$. Weiterhin sei vorausgesetzt, dass Z nicht in der Ebene dieser Würfelseite liegt.

Bekanntlich bilden die vier Punkte A, B, C und D ein Quadrat, sodass sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ halbieren. Da die Seitenlänge des Würfels bekannt ist, sind auch die Längen der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ bekannt. Damit kann mit der in Kapitel 4.1 bewiesenen Konstruktion die räumliche Lage der Punkte A, B, C und D bis auf Punktspiegelung an Z bestimmt werden. Da der Würfel aber in derselben Halbebene bezüglich E_Z liegt wie E_D kann eine dieser beiden Lagen ausgeschlossen werden, sodass die Lage der Seitenfläche im Raum eindeutig bestimmt werden kann.

Ist die Lage einer Seitenfläche gegeben, so kann der Würfel offenbar auf zwei Arten im Raum liegen. Um zu zeigen, dass das Schattenbild eindeutig festlegt, in welcher der beiden Lagen der Würfel ist, wird bewiesen, dass die beiden Lagen unterschiedliche Schattenbilder haben.

Lemma 12: Seien W und W' zwei Würfel, die in einer Seitenfläche übereinstimmen und beide im selben Halbraum bezüglich E_Z liegen wie E_D. Dann ist $f(W) \neq f(W)$.

Beweis: Angenommen es gilt $f(W)=f(W')$. Die Ebene E enthalte, wie in Abb. 11 zu sehen, jeweils eine Seitenfläche von W und W'. Weiterhin sei F die Ebene der gemeinsamen Seitenfläche. Läge Z in F, so würde F mit Lemma 4 auf eine Gerade $f(F)$ abgebildet. Da W und W' in verschiedenen Halbräumen bezüglich F liegen, würden $f(W)$ und $f(W')$ in verschiedenen Halbebenen bezüglich $f(F)$ liegen. Dies widerspricht je-

doch $f(W)=f(W')$. Sei deshalb $Z \notin F$ und liege o.B.d.A. Z im selben Halbraum wie W bezüglich F. Ferner sei A einer der beiden Eckpunkte von W', die in E, aber nicht in F liegen. Nun gilt $f(W)=f(W)$, sodass $f(A)$ auch in $f(W)$ enthalten sein muss. Folglich gibt es einen Punkt B des Würfels W, der auf der Geraden $g(ZA)$ liegt.

Nun liegen Z und B im selben Halbraum bezüglich F, A aber in dem anderen. Also kann A nicht zwischen B und Z auf der Geraden liegen. Damit liegt Z auf dem Strahl $\overrightarrow{AB}$. Dieser liegt jedoch vollständig in dem Halbraum bezüglich E, in dem auch W und W' liegen, sodass auch Z in diesem Halbraum liegt.

Sei nun C ein Eckpunkt von W der Ebene E, der sich aber nicht auf F befindet. Wie im obigen Fall muss es einen Punkt D des Würfels W' geben, der auf $g(ZC)$ liegt. Erneut kann D nicht zwischen Z und C liegen. Da beide Würfel vollständig im selben Halbraum bezüglich E_Z liegen, kann Z nicht in einem der beiden Würfel liegen. Insbesondere kann Z nicht zwischen C und D liegen. Damit liegt C zwischen D und Z. Angenommen die Gerade $g(ZC)$ würde E in C schneiden, so müssten nun D und Z in verschiedenen Halbräumen bezüglich E liegen. Dies widerspricht jedoch dem zuvor Gezeigten. Also kann $g(ZC)$ die Ebene E nicht in C schneiden. Da sie aber den Punkt C mit E gemeinsam hat, muss $g(ZC)$ vollständig in E liegen. Insbesondere liegt damit auch Z in E. Nun ist E als eine der vier Ebenen definiert, die je eine Seitenfläche der beiden Würfel enthalten. Analog liegt Z also in jeder dieser Ebenen. Jedoch sind jeweils zwei der Ebenen parallel. Dies ist ein Widerspruch, sodass die Annahme $f(W)= f(W')$ muss falsch sein.

Damit kann die Lage des Würfels W aus den Punkten $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ und $f(D)$ sowie seinem restlichen Schattenbild eindeutig bestimmt werden. □

Nun bilden auch Eckpunkte, die wie A, B, G und H auf dem Würfel liegen, ein Rechteck. Dieses hat zwei Kanten des Würfels und zwei seiner Flächendiagonalen als Seiten. Bekanntlich halbieren sich die Diagonalen eines Rechtecks. Da zudem die Seitenlängen bekannt sind, kennen wir auch die Längen von $\overline{AG}$ und $\overline{BC}$. Mit der Konstruktion aus Kapitel 4 kann deshalb wie oben die Lage der vier Punkte im Raum eindeutig bestimmt werden, wenn die Punkte $f(A)$, $f(B)$, $f(G)$ und $f(H)$ bekannt sind. Nun ist die Lage des Würfels durch die vier Punkte A, B, G und H offenbar eindeutig bestimmt. Folglich kann die Position des Würfels im Raum auch durch die vier Punkte $f(A)$, $f(B)$, $f(G)$ und $f(H)$ eindeutig konstruiert werden. Damit können wir zeigen:

Satz 3: Es seien M, N, O und P Eckpunkte von W, wobei MNOP ein Rechteck ist und die Ebene, in der die Punkte liegen, nicht Z enthält. Dann kann die Lage von W aus f(W) sowie f(M), f(N), f(O) und f(P) eindeutig rekonstruiert werden.

Beweis: Aus den Eckpunkten eines Würfels sind nur zwei verschiedene Arten von Rechtecken zu bilden, solche, bei denen die Ecken des Vierecks die Eckpunkte einer Seitenfläche sind und zum Viereck $ABGH$ kongruent. Wie gezeigt, kann bei beiden Möglichkeiten mit der Konstruktion aus Kapitel 4 zunächst ihre Lage aus $f(M)$, $f(N)$, $f(O)$ und $f(P)$ bis auf Streckung an Z rekonstruiert werden. Die Ergebnisse sind, unter Verwendung bekannter Eigenschaften der Streckung, jeweils ähnlich zu dem Viereck $MNOP$.

Ist $MNOP$ eine Seitenfläche, so sind die Seiten dieses Vierecks offenbar gleich lang. Unter Nutzung der Eigenschaften der Streckung trifft dies auch auf das Bild von $MNOP$ unter Streckung an Z zu. Handelt es sich aber um ein Viereck, das kongruent zu $ABGH$ ist, so ist eine Seite auch Kante des Würfels und eine andere eine Flächendiagonale von W. Insbesondere ist das Verhältnis benachbarter Seiten auch bei dem an Z gestreckten Viereck $MNOP$ gleich $1:\sqrt{2}$. Anhand dieses Verhältnisses lassen sich damit die beiden Fälle unterscheiden.

Die Information, um welches der beiden Vierecke es sich handelt, ist also nicht notwendig. Stellt sich heraus, dass $MNOP$ eine Seitenfläche ist, so kann der Würfel mit der am Anfang des Kapitels beschriebenen Konstruktion sowie mit Lemma 12 eindeutig rekonstruiert werden. Ist $MNOP$ das zuvor beschriebene Rechteck, kann die Lage ebenfalls eindeutig konstruiert werden (siehe oben). □

Dieser Satz zeigt also auf, wie man die Lage von W anhand des Schattenbilds $f(W)$ sowie einiger bekannter Punkte bestimmen kann. Jedoch sind diese Punkte nicht immer klar aus $f(W)$ ersichtlich. Im Folgenden soll deshalb vorgestellt werden, wie eine Konstruktion der Position von W im Raum dennoch immer gelingt. Die Rekonstruktion geschieht dabei gemäß des folgenden Algorithmus:

I. Für jede mögliche Auswahl an vier Eckpunkten von $f(W)$ tue:
   i. Konstruiere, falls möglich, den zu den Punkten gehörigen Würfel W'
   ii. Überprüfe $f(W')=f(W)$. Falls dies wahr ist, speichere W' als eine Lagemöglichkeit von W, sonst verwerfe W'.

Dass dieser Algorithmus tatsächlich funktioniert, soll nun gezeigt werden. Dabei fällt zunächst auf, dass der Algorithmus kein falsches Ergebnis, also eine Lage von W, bei welcher der Würfel nicht $f(W)$ als Schatten wirft, ausgeben kann. Dies folgt daraus, dass für jeden möglichen Würfel W' überprüft wird, ob er $f(W)$ als Schatten hat.

Nun soll gezeigt werden, dass die richtige Lage von W durch den Algorithmus auch stets gefunden wird: Betrachtet man die nach Satz 2 (Abschnitt 3) möglichen Formen von $f(W)$, stellt sich heraus, dass $f(W)$ stets vier Eckpunkte enthält, deren entsprechende Würfelecken ein Rechteck bilden. Bei der ersten Lagemöglichkeit ist dies der Fall, weil die vier Eckpunkte einer Würfelseite ein Quadrat bilden. Bei der zweiten bilden die Punkte A, E, G und C ein Rechteck, bei der dritten entstehen die Rechtecke $ABFE$, $BCGF$ und $ACGE$ und auch bei der vierten lassen sich die drei Rechtecke $ABCH$, $BCHE$ und $ACGE$ finden.

Damit gibt es stets mindestens eine Auswahl an vier Eckpunkten von $f(W)$, bei welcher die zugehörigen Ecken von W ein Rechteck bilden. Nach Satz 3 kann aus diesen Eckpunkten und aus $f(W)$ mit der am Anfang des Kapitels beschriebenen Konstruktion die Lage von W eindeutig bestimmt werden. Die tatsächliche Lage von W ist also immer unter den konstruierten Würfeln.

Der Algorithmus liefert stets die korrekte Position des Würfels im Raum. Es ist jedoch zu beachten, dass weitere Würfel

gefunden werden können, die auch den Schatten *f(W)* werfen. Da es aber maximal $\binom{6}{4} = 15$ verschiedene Auswahlmöglichkeiten gibt, existieren höchstens 15 solcher Würfel. Wir vermuten, dass es im Allgemeinen jedoch nur eine Lagemöglichkeit des Würfels zu einem gegebenen Schatten gibt. Diese würde dann von dem Algorithmus gefunden werden. Leider waren wir nicht in der Lage, diese Vermutung vollständig zu beweisen.

Zusammenfassend ist es uns gelungen, die Lage eines Würfels im Raum eindeutig zu bestimmen. Hierfür benötigen wir lediglich die Kantenlänge des Würfels und die Eckpunkte seines Schattens. Diese Angaben sind in der Realität bei der Untersuchung von Objekten bekannt, sodass unser Verfahren der Anwendung in der Wirklichkeit gerecht wird.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In der Industrie wird zukünftig weiterhin die Röntgentomographie zur Untersuchung verschiedener Objekte genutzt werden. Dabei ist die exakte Lagebestimmung dieser Gegenstände von essentieller Bedeutung, um eventuell auftretende Fehlerstellen präzise lokalisieren zu können. In den vorausgegangenen Kapiteln konnten wir einen Einblick in ein dafür von uns entwickeltes Verfahren geben. Mit diesem könnte in Zukunft die Bestimmung der räumlichen Lage von Objekten möglich sein, wobei nur der Schatten und die Form eines Körpers als Voraussetzung benötigt werden. In unserer Abstraktion stützen wir uns dabei auf das Auffinden markanter Punkte, welche ein Parallelogramm bilden. Da in vielen Objekten solche Punkte existieren, könnte in Zukunft auch die Rekonstruktion der Lage komplexerer Objekte möglich gemacht werden. Jedoch stellt unsere Methode bis jetzt nur einen theoretischen Ansatz dar. So konnten wir beweisen, dass unsere Konstruktion die räumliche Lage eines Würfels nur aus seinem Schatten und seiner Kantenlänge ermitteln kann. Zu diesem Sachverhalt konnten wir ein Programm schreiben. Dieses liefert für gegebene ideale Würfelschatten sehr gute Ergebnisse.

Ein Nachweis, dass unser Verfahren auch in der Praxis gute Ergebnisse liefert, steht jedoch noch aus. Dazu wäre es notwendig, zu betrachten, wie reale Fehler das mathematische Modell beeinflussen. Solche Fehler treten zum Beispiel durch eine nicht-punktförmige Strahlungsquelle sowie eine beschränkte Genauigkeit des Detektors auf. Es wäre weiterhin zu klären, ob die Ergebnisse der Lagebestimmung gemäß unseres Verfahrens unter Einbeziehung solcher Fehlerquellen noch immer in einem akzeptablen Toleranzbereich liegen. Hierzu sind aber Tests an existierenden Anlagen notwendig, welche wir bis jetzt noch nicht durchgeführt haben.

Weiterhin wäre die Beschäftigung mit anderen geometrischen Körpern außer dem Würfel denkbar. So könnten große Teile unserer Arbeit für würfelähnliche Objekte, wie zum Beispiel Prismen oder Parallelepipede, verallgemeinert werden, da beide Parallelogramme als begrenzende Flächen besitzen. Auch eine Auseinandersetzung mit Objekten, die sich vom Würfel grundlegend unterscheiden, wäre in diesem Zusammenhang spannend. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, stellte die zerstörungsfreie Prüfung von Gussteilen eine der Motivationen für unsere Arbeit dar. Als typische Vertreter werden Kolben und Zylinderköpfe von Motoren häufig untersucht. Da deren äußere Form dem Zylinder ähnelt, wäre die Betrachtung gerade dieses Körpers eine weitere interessante mathematische Abstraktion.

Danksagung

Abschließend möchten wir unserem Lehrer Dr. Bernd Licht und unserem Betreuer Dr.-Ing. Florian Römer danken, die uns bei dieser Arbeit hervorragend unterstützt haben.

Quellenverzeichnis

[1] P. Markelj, D. Tomazevic, B. Likar, and F. Pernus, „A review of 3D/2D registration methods for image-guided interventions“, Medical Image Analysis vol. 16,2012, S. 648.

[2] Jürgen Weese, P. Penney Graeme, Paul Desmedt, Thorsten M. Buzug, Derek L. G. Hill, and David J.Hawkes, „Voxel-Based 2-D/3-D Registration of Fluoroscopy Images and CT Scans for Image-Guided Surgery“,IEEE Transactions On Information Technology in Biomedicine, vol. 1, no. 4, Dezember 1997, S. 268 ff. .

[3] David A. LaRose, „Iterative X-Ray/CT Registration using Accelerated Volume Rendering“, Ph. D. dissertation, Carnegie Mellon University, Mai 2001, S. 7-25.