



Sonja Meier, \*1992

Schule:  
Gymnasium Liestal, Schweiz

Eingang der Arbeit:  
September 2011

Zur Veröffentlichung angenommen:  
Dezember 2011

## Spirale ist nicht gleich Spirale!

### Spiralen in der Mathematik und in der Natur

Wer kennt sie nicht, die Kurve, die jedes Schneckenhaus ziert und auch bei vielen Pflanzen zu entdecken ist? Spiralen kommen aber nicht nur in der Natur vor, sie sind auch Gegenstand der Mathematik. Das Ziel dieser Arbeit war es, natürliche Spiralen mit mathematischen Spiraltypen zu vergleichen.

#### 1 Einleitung

Jedem von uns kommt beim Stichwort Spiralen sofort ein Beispiel aus der Natur in den Sinn. Dieses Phänomen der Spiralbildung ist alles andere als unbekannt und trotzdem gibt es noch vieles zu erforschen.

Die Mathematik definiert verschiedene Spiraltypen, welche sich in ihren Eigenschaften und somit auch in ihrem Aussehen stark unterscheiden. Spirale ist nicht gleich Spirale! Es stellt sich somit die Frage, ob bei allen Pflanzen und Tieren derselbe Spiraltyp zu finden ist, oder ob die Natur viele verschiedene Spiraltypen hervorbringt.

Im Rahmen dieser Arbeit soll erforscht werden, um welche mathematischen Spiraltypen es sich bei den in der Natur auftretenden Spiralen handelt. Schmücken sich Schneckenhäuser mit einer logarithmischen Spirale? Liegen die Kerne von Sonnenblumen auf archimedischen oder fermatschen Spiralen?

Die Thesen dazu liefern biologische Überlegungen zum Wachstum von Pflanzen und Gehäusen:

Bei Pflanzen, wie z. B. der Sonnenblume, treten sowohl links- als auch rechtsdrehenden Spiralen auf (vgl. Abb. 1). Diese sind laut [1] (S.43) und [2] (Kapitel 5.7.1) auf die folgenden Überlegungen zurück zu führen: Jede neue Anlage (z. B. ein Kern) schliesst mit der nächst älteren Anlage denselben Winkel, den sogenannten Divergenzwinkel, ein. Jede Pflanze hat einen für sich charakteristischen Divergenzwinkel. Kiefernzapfen haben z. B. einen Divergenzwinkel von  $120^\circ$ , jener der Sonnenblumen beträgt  $137,53^\circ$ . Unter all diesen Winkeln gibt es den Goldenen Winkel von  $137,52^\circ$ . Ist der Divergenzwinkel der Pflanze eine gute Näherung des Goldenen Winkels, so wird nie eine Anlage genau an der gleichen Stelle wie eine ältere Anlage zu stehen kommen. So erreicht die Pflanze eine für Sonnenlicht und Wasseraufnahme maximierte Oberfläche. Nach [2]

(S. 145) und [3] (S. 257 ff.) handelt es sich bei diesen Spiralen im Fruchtstand von Pflanzen um logarithmische Spiralen. Bei tierischen Gehäusen ist die Spiralbildung auf das folgende Problem zurückzuführen (vgl. [1], S.46. ff. und [2], Kapitel 5.7.2): Während des Wachstums des Gehäuses muss die Form der Scha-

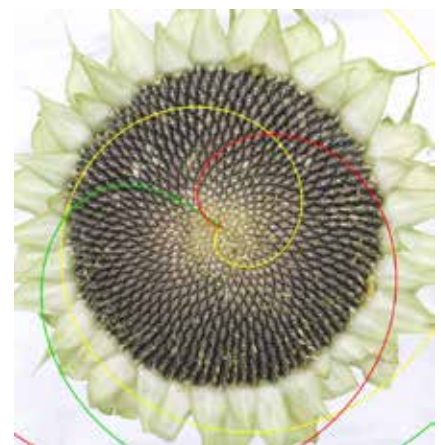


Abb. 1: Bei Sonnenblumen ist nicht nur eine Spirale zu finden. Hier sind zwei linksdrehende und eine rechtsdrehende Spirale eingezeichnet.

le trotz Anfügung neuer Elemente ähnlich zu ihrer vorigen Form sein. Denn die Form des Gehäuses hat bei jedem Weichtier eine Funktion, welche auch während des Wachstumsprozesses erfüllt werden muss. Die Schwierigkeit besteht darin, dass das Gehäuse, im Gegensatz zum menschlichen Körper, nur an einem „Ende“ weiter wachsen kann. In [2] (S. 153) wird folgendes Fazit gezogen:

„Bei rotationssymmetrischer Struktur [...] führen die konkurrierenden Anforderungen von Wachstum und Ähnlichkeit zwingend zu logarithmischen Spiralen! Die vollkommene Selbstähnlichkeit ist ein charakteristisches Merkmal logarithmischer Spiralen, das für das häufige Auftreten dieser Kurvenform in der Natur mitverantwortlich ist.“

Anstatt theoretischen Überlegungen nachzugehen, orientiert sich diese Arbeit an der Pflanze und dem Tier selbst. Anhand von Fotografien sollen mathematische und natürliche Spiralen miteinander verglichen werden.

Da die Natur unzählige Beispiele bietet, musste für die Untersuchungen eine Auswahl getroffen werden. Die Spiralen bei Pflanzen wurden anhand von Sonnenblumen und Kiefernzapfen untersucht. Als Beispiele für die tierische Natur dienten Schneckenhäuser, Ammoniten und eine Nautiluschale.

## 2 Mathematischer Hintergrund

### 2.1 Was sind Spiralen?

Der Begriff der Spirale wird von einigen Autoren sehr weit, von anderen eher eng aufgefasst. Die folgende Definition stammt aus dem Buch von J. Heitzer [2] (S. 12). Sie überzeugt durch ihre Anschaulichkeit und gleichzeitig durch eine für diese Arbeit ausreichend mathematische Exaktheit:

„Eine Spirale ist eine ebene Kurve, die aus unendlich vielen Windungen um einen festen Punkt [ihren Pol] besteht und aus höchstens zwei Ästen zusammengesetzt ist, bei denen der Abstand vom Mittelpunkt streng monoton vom Drehwinkel abhängt.“

Diese Definition betrachtet Spiralen im zweidimensionalen Raum. Die Vernachlässigung der dritten Dimension bildet die Grundlage der folgenden Untersu-

chungen. Durch das Fotografieren der Untersuchungsobjekte werden die dreidimensionalen Schraubenlinien auf zweidimensionale Spiralen abgebildet.

Natürliche Spiralen haben in Gegensatz zu mathematischen Spiralen eine endliche Anzahl Windungen um ihren Pol. Sie können jedoch als Spiralanfänge betrachtet werden.

Die geforderte strenge Monotonie schließt Kreise und Kurven, bei denen der Spiralverlauf zum Beispiel von einer Wellenbewegung überlagert ist, aus. Der Abstand zwischen den Spiralpunkten und dem Pol muss mit wachsendem Drehwinkel entweder fortwährend zu- oder abnehmen.

### 2.2 Übersicht über die wichtigsten Spiraltypen

Jeder Spiraltyp wird durch eine Gleichung beschrieben, die jeweils den Radius  $r$  in Abhängigkeit des Winkels  $\varphi$  definiert. Deshalb sind Polarkoordinaten als Bezugssystem für die Darstellung von Spiralen besser geeignet als kartesische Koordinaten.

Im Rahmen der Untersuchungen werden acht verschiedene Spiraltypen berücksichtigt. Es handelt sich dabei um eine Auswahl, welche ein möglichst breites Spektrum an Spiraltypen abdeckt. Auf den Abbildungen 2-8 sind jeweils beide Äste der Spirale eingezeichnet. Nur die logarithmische Spirale besteht aus einem einzigen Ast (vgl. Abb. 9).

#### 2.2.1 Die Archimedische Spirale

Gleichung:  $r = a\varphi$ ;  $a \neq 0$ ;  $D = \mathbb{R}$

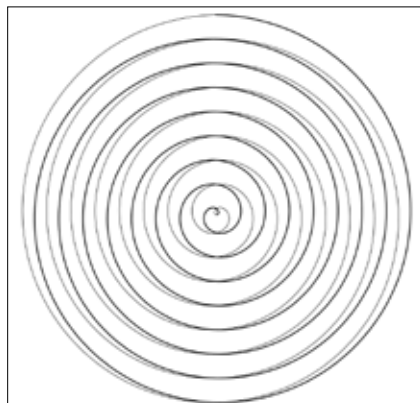


Abb. 2: Archimedische Spirale

Der Radius  $r$  der Archimedischen Spirale wächst proportional mit dem Polarwinkel

$\varphi$  an. Dabei ist  $a$  der Proportionalitätsfaktor. Aufgrund dieser Proportionalität ist der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Windungen der Archimedischen Spirale konstant.

#### 2.2.2 Die Fermatsche Spirale

Gleichung:  $r^2 = a^2\varphi$ ;  $a \neq 0$ ;  $D = \mathbb{R}_+$

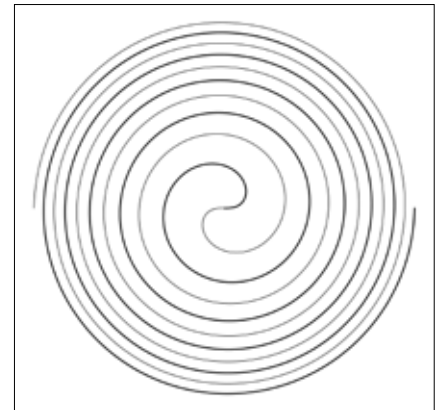


Abb. 3: Fermatsche Spirale

Wegen dem erhöhten Grad in  $r$  nimmt der Windungsabstand bei der Fermatschen Spirale mit wachsender Entfernung zum Pol ab. Ein weiteres charakteristisches Merkmal der Fermatschen Spirale ist die stark gekrümmte erste Windung.

#### 2.2.3 Die Spirale dritten Grades in $r$

Gleichung:  $r^3 = a^3\varphi$ ;  $a \neq 0$ ;  $D = \mathbb{R}$

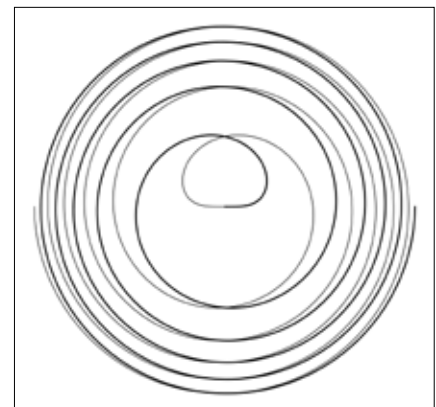


Abb. 4: Spirale dritten Grades in  $r$

Wie der Name dieser Spirale schon sagt, kommt  $r$  im dritten Grad vor. Die Abstände zwischen den Windungen nehmen daher noch stärker als bei der Fermatschen Spirale mit wachsendem Polarwinkel ab. Auch die Spirale dritten Grades in  $r$  weist in ihrer ersten Windung einen speziellen Bogen auf.

## 2.2.4 Die Galileische Spirale

Gleichung:  $r = a\varphi^2$ ;  $a \neq 0$ ;  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

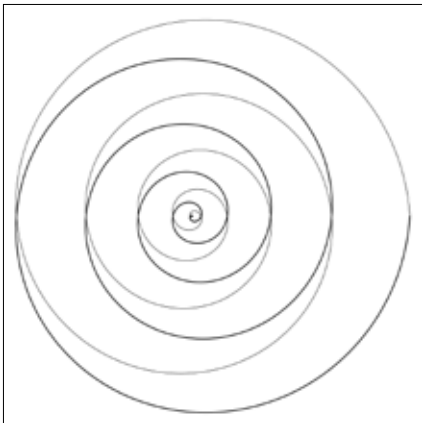


Abb. 5: Galileische Spirale

Eine weitere Variation der archimedischen Spiralegleichung entsteht durch die Erhöhung des Grades in  $\varphi$ . Der Abstand aufeinanderfolgender Windungen nimmt mit wachsender Entfernung zum Pol zu.

## 2.2.5 Die Spirale dritten Grades in $\varphi$

Gleichung:  $r = a\varphi^3$ ;  $a \neq 0$ ;  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

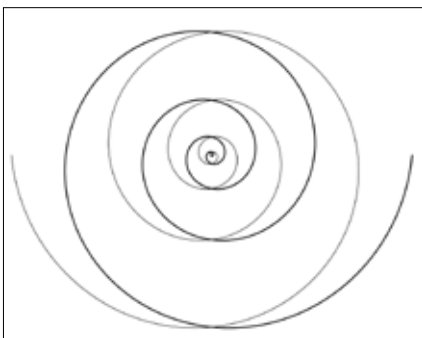


Abb. 6: Spirale dritten Grades in  $\varphi$

Erhöht man den Grad von  $\varphi$  noch weiter, so entsteht die Spirale dritten Grades in  $\varphi$ . Ihr Windungsabstand nimmt mit wachsendem Polarwinkel noch stärker zu.

## 2.2.6 Die Hyperbolische Spirale

Gleichung:  $r = a/\varphi$ ;  $a \neq 0$ ;  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

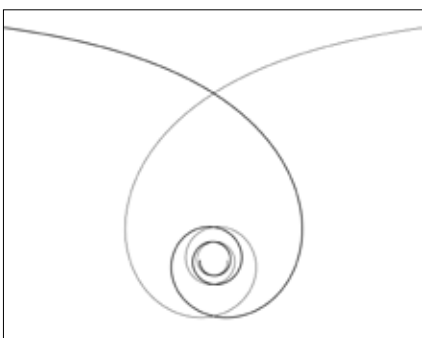


Abb. 7: Hyperbolische Spirale

Bei der Gleichung der hyperbolischen Spirale hängen  $r$  und  $\varphi$  umgekehrt proportional zusammen. Dieser Zusammenhang erinnert an die Hyperbelfunktion in kartesischen Koordinaten und gibt der Spirale ihren Namen. Sie fällt zudem durch ihr asymptotisches Verhalten für  $\varphi \rightarrow 0$  und  $\varphi \rightarrow 1$  auf. Für  $\varphi \rightarrow 1$  umrundet sie ihren Pol in unzähligen, immer enger werdenden Windungen, erreicht ihn jedoch nie. Ihr Pol ist ein asymptotischer Punkt.

## 2.2.7 Der Lituus

Gleichung:  $r^2 = a^2/\varphi$ ;  $a \neq 0$ ;  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

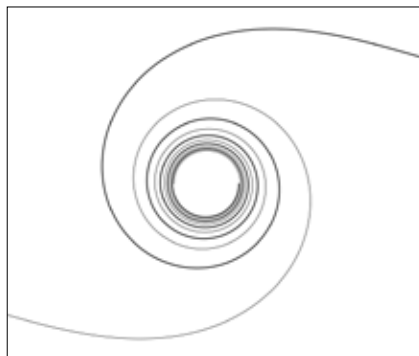


Abb. 8: Der Lituus

Der Lituus zeigt wie die hyperbolische Spirale ein asymptotisches Verhalten für  $\varphi \rightarrow 0$ . Ihr Pol ist ebenfalls ein asymptotischer Punkt.

## 2.2.8 Die Logarithmische Spirale

Gleichung:  $r = e^{b\varphi}$ ;  $b \neq 0$ ;  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

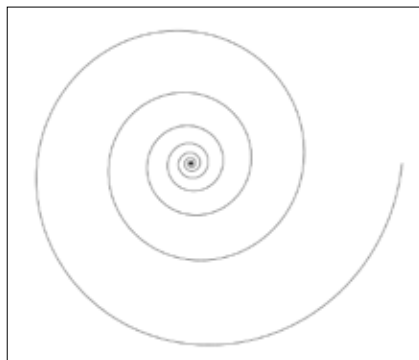


Abb. 9: Die Logarithmische Spirale

Die logarithmische Spirale unterscheidet sich in ihrer Gleichung klar von allen bisher betrachteten Spiralen. Ihr Radius wächst exponentiell mit dem Polarwinkel, und der Polarwinkel hängt logarithmisch vom Radius ab. Da sich der Radius über den gesamten Definitionsbereich von  $\varphi$  streng monoton entwickelt, besteht die

logarithmische Spirale nur aus einem Ast. Sie wechselt ihren Drehsinn, wenn  $b$  das Vorzeichen wechselt. Wie bei der hyperbolischen Spirale und dem Lituus ist der Pol der logarithmischen Spirale ein asymptotischer Punkt, den die immer enger werdenden Windungen nie erreichen. Was die Mathematiker jedoch wirklich an der logarithmischen Spirale fasziniert hat und noch immer fasziniert, ist ihre Selbstähnlichkeit oder ihre „unendlich vielfältige Reproduzierbarkeit“, wie Bernoulli es ausdrückte (vgl. [2], S. 61). Hier soll nur ein Beispiel von vielen genannt werden: Spiegelt man die logarithmische Spirale an einer beliebigen Tangente und rollt die Bildspirale auf der ersten ab, so beschreibt der Pol der rollenden Spirale wieder genau die Spirale, von welcher ausgegangen wurde. (vgl. [1], S.22 und [4], S.19)

## 3 Methode

Die zweidimensionalen Untersuchungen werden anhand von selbstfotografierten Bildern durchgeführt. Mithilfe dieser Fotografien wird jeweils die natürliche Spirale mit einer der oben beschriebenen Spiraltypen verglichen. Konkret wird versucht, die mathematischen Spiraltypen an die natürliche Spirale anzupassen.

## 3.1 Geogebra

„GeoGebra ist eine dynamische Mathematiksoftware, die Geometrie, Algebra und Analysis verbindet.“ [5] Die acht gewählten Spiraltypen werden mit Hilfe von Geogebra alle nach demselben Prinzip konstruiert (vgl. Abb. 10). Im Folgenden wird als Beispiel die Konstruktion der ersten Windung der archimedischen Spirale beschrieben: Die Punkte dieses Spiraltyps erfüllen die Gleichung  $r = a\varphi$ . Setzt man den Proportionalitätsfaktor  $a$  vorerst auf 1, so lauten die Polarkoordinaten eines solchen Punktes  $P(\varphi; \varphi)$ . Damit wir alle Punkte der ersten Windung der archimedischen Spirale erhalten, soll der Winkel  $\varphi$  alle Werte von 0 bis  $2\pi$  durchlaufen. Dazu ist eine Hilfskonstruktion nötig: Wir definieren den Punkt  $A$ , welcher sich im kartesischen Koordinatensystem auf der  $x$ -Achse befindet. Geogebra ermöglicht es, diesen Punkt  $A$  auf der  $x$ -Achse beliebig weit nach rechts laufen zu lassen, so dass seine  $x$ -Koordinate wie gewünscht alle Werte von 0 bis  $2\pi$  durchläuft. Die Koordinaten von  $P$  können nun mithilfe der  $x$ -Koordinate von  $A$  ausgedrückt werden:  $P(x(A); x(A))$ .

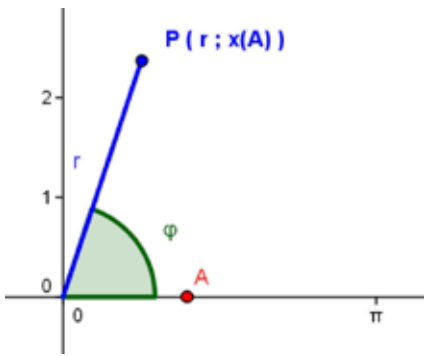


Abb. 10: Der Punkt P wird in Polarkoordinaten (Radius; Winkel) in Abhängigkeit des Punktes A konstruiert.

Mit dem Befehl „Ortslinie“ wird anschließend die Bahn von P gezeichnet, welche entsteht, wenn sich A auf der x-Achse nach rechts bewegt. Diese Bahn entspricht der ersten Windung der archimedischen Spirale. Ganz analog können die anderen Spiraltypen programmiert werden.

Durch Drehen, Strecken und Verschieben des Pols sollen die mathematischen Spiralen möglichst gut an die natürlichen Spiralen angepasst werden. In Geogebra können mithilfe von Schieberegler Parameter eingeführt werden, welche die gewünschten Manipulationen ermöglichen.

Der Streckungsfaktor  $a$  wird mit dem Radius von P multipliziert, während der Drehwinkel  $\alpha$  zu  $\varphi$  addiert wird:  $P(a \cdot r; \varphi + \alpha)$ . Die Polarkoordinaten der Punkte der archimedischen Spiralen lauten mit den beiden Parametern also  $P(a \cdot x(A); x(A) + \alpha)$ . Zum Verschieben des Spiralspols wird ein Punkt  $P'$  in kartesischen Koordinaten wie folgt definiert:  $P'(x(P) + c, y(P) + d)$ . Erzeugt man die Ortslinie von  $P'$ , so entsteht die Spirale, deren Pol die kartesischen Koordinaten  $(c, d)$  hat.

### 3.2 Bearbeitung der Fotografien

Im Folgenden wird dokumentiert, wie die Fotografien bearbeitet werden. Dabei wird zwischen Gehäusen und pflanzlichen Untersuchungsobjekten unterschieden. Dies aus dem Grund, dass Gehäuse nur eine, die Fruchtstände der Pflanzen hingegen mehrere Spiralen aufweisen. Nach dem Einfügen einer Fotografie in die Software Geogebra werden einige Punkte der natürlichen Spirale markiert. Mithilfe dieser Vergleichspunkte kann die natürliche Spirale später mit den verschiedenen mathematischen Spiralen verglichen werden.

Die Vergleichspunkte bei den Gehäusen werden mithilfe von drei Halbgeraden konstruiert, welche etwa im Zentrum der natürlichen Spirale (dem Pol) beginnen (vgl. Abb. 11). So repräsentiert jeder Vergleichspunkt rund ein Drittel einer Windung.

Im Gegensatz zum Pol der tierischen Spiralen, lässt sich jener der pflanzlichen Spiralen konstruieren: Der erste Kern in der Mitte der Pflanze stellt den Ursprung des Wachstums dar und ist somit auch der Pol aller Spiralen. Bei den pflanzlichen Untersuchungsobjekten liegt der Pol folglich im Mittelpunkt der kreisförmigen Fläche aus Kernen. Jede der Pflanzen weist verschieden steile rechts- und linksdrehende Spiralscharen auf. Der Begriff Spiralschar bezeichnet Spiralen, welche denselben Drehsinn haben und gleich steil sind. Pro Fruchtstand werden jeweils diejenigen drei Spiralscharen betrachtet, welche am besten sichtbar sind. Pro Schar werden wiederum drei natürlichen Spiralen mit möglichst klarem Verlauf gewählt. Bei steilen Spiralen (vgl. grüne Spirale in Abb. 1) werden drei, bei flacheren Spiralen (gelb) fünf Punkte eingezeichnet. Die Punkte werden bei den Sonnenblumen in die Mitte der Kerne, bei den Kiefernzapfen auf die Spitze der Schuppen gesetzt.

Nacheinander werden in Geogebra alle vorher „programmierten“ Spiraltypen angezeigt. Mithilfe der Schieberegler wird versucht, sie an die natürliche Spirale anzupassen:

Bei den Gehäusen wird als erstes der Pol verschoben, bis er dort liegt, wo der Pol der natürlichen Spirale zu vermuten

ist. Als Nächstes wird die Spirale mit dem Parameter  $a$  gestreckt oder gestaucht. Dann wird der Pol wieder verschoben und der Streckungsfaktor angepasst, bis die mathematische Spirale möglichst gut passt. Bei der logarithmischen Spirale muss außerdem noch der Parameter  $b$ , welcher den konstanten Tangentenwinkel der Spirale festlegt, mit einbezogen werden. Der Parameter  $\alpha$  hat meist keine bedeutende Rolle, da bei den Spiralen, welche etwa den Verlauf der tierischen Spirale haben (logarithmische, galileische und Spirale dritten Grades in  $\varphi$ ), eine Drehung einen ähnlichen Effekt wie eine Streckung hat.

Bei den Pflanzen ist der Pol fix in der Mitte der Blume, deshalb wird gleich mit dem Strecken der mathematischen Spiralen begonnen. Um die mathematische Spirale in die richtige Lage zu bringen,

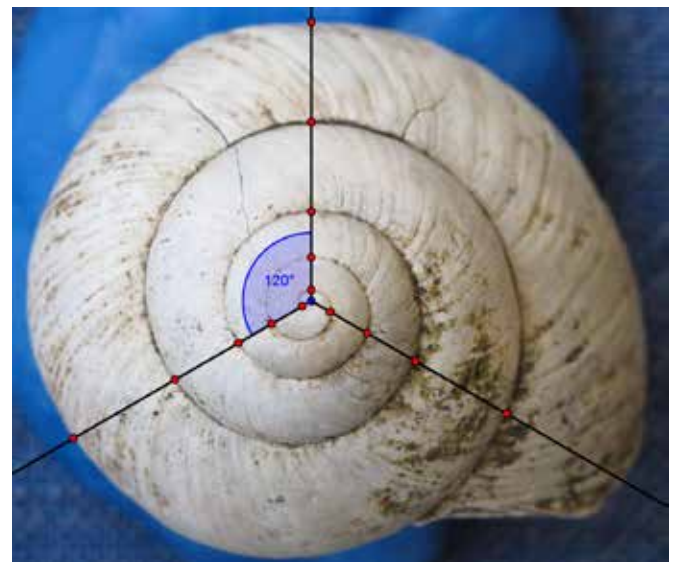


Abb. 11: Die Schnittpunkte der Halbgeraden mit der natürlichen Spirale werden als Vergleichspunkte markiert.

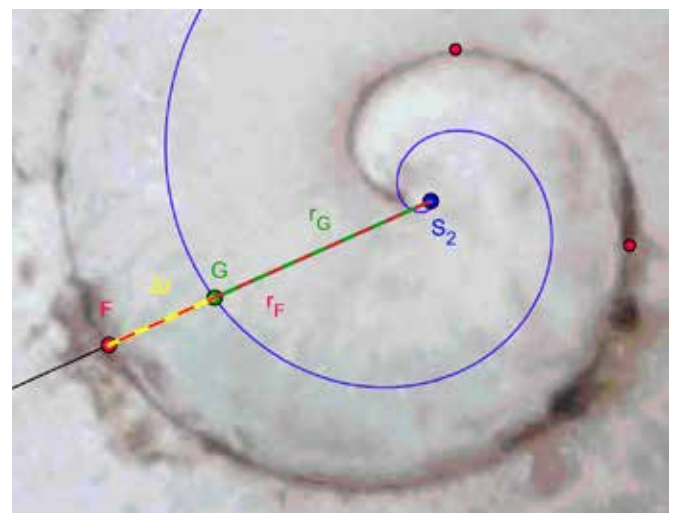


Abb. 12: Das Einzeichnen und Messen einer Radiendifferenz (gelb).

wird als nächstes der Parameter  $\alpha$  verändert. Die Spirale wird durch abwechselndes Ändern des Drehwinkels und des Streckungsfaktors an die natürliche Spirale angepasst. Bei den Gehäusen muss oftmals ein Kompromiss gefunden werden. Das Ziel ist es, den Spiraltypen zu finden, der im Bezug auf alle Windungen passt. Da die Fruchtstände der Sonnenblumen und Kiefernzapfen nur einen Abschnitt der ersten Windung zeigen, ist es umso wichtiger, dass der Spiraltyp nicht nur bei den Vergleichspunkten gut passt, sondern auch denselben Verlauf wie die natürliche Spirale hat.

### 3.3 Auswertung der Messdaten

Als Maß für das Übereinstimmen der natürlichen Spirale mit dem jeweiligen mathematischen Spiraltypen dienen Radiendifferenzen. Vom Pol der mathematischen Spirale wird durch jeden Vergleichspunkt (vgl. Punkt F in Abb. 12) eine Halbgerade gelegt. Als Nächstes wird der Schnittpunkt der Halbgeraden mit der mathematischen Spirale (vgl. Punkt G in Abb. 12) markiert. Anschließend werden die beiden Radien  $r_F$  und  $r_G$  miteinander verglichen. Die Strecke FG entspricht somit der Radiendifferenz.

Nachdem alle Radiendifferenzen gemessen wurden, stellt sich die Frage, wie die Messdaten ausgewertet werden. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten, wovon einige nicht zum gewünschten Ergebnis führen. Bildet man z. B. schlicht die Summe aller Radiendifferenzen, so werden jene Spiraltypen benachteiligt, welche bei den inneren Windungen eines Gehäuses gut passen, bei den äußeren jedoch schlechter. Dies aus dem Grund, dass die Radien der äußeren Windungen länger sind, und so schnell eine größere Radiendifferenz entsteht.

Zur Auswertung der Messdaten wurde die folgende Methode entwickelt, welche das Ergebnis nicht wie oben gezeigt verfälscht: Für jede Windung wird eine Rangliste

erstellt. Bei einem Gehäuse wird zuerst nur die erste Windung betrachtet. Sollen nun z. B. drei Spiraltypen miteinander verglichen werden, so erhält der Spiraltyp mit der kleinsten Summe der Radiendifferenzen zwei Punkte, der Spiraltyp mit der zweitkleinsten Summe einen Punkt und der Spiraltyp mit der größten Summe keinen Punkt. Nach diesem Prinzip werden für jede Windung Punkte verteilt. So passt der Spiraltyp, welcher insgesamt die meisten Punkte hat, in Bezug auf alle Windungen am besten. In Tabelle 1 werden die logarithmische, die galileische Spirale und die Spirale dritten Grades in  $\phi$  miteinander verglichen. Bei der ersten Windung hat die galileische Spirale die kleinste Summe der Radiendifferenzen und erhält somit zwei Punkte. Die logarithmische Spirale erhält mit einer Summe von 0,76 noch einen Punkt und die Spirale dritten Grades in  $\phi$  mit der größten Summe von 1,3 keinen Punkt. Insgesamt erzielt die galileische Spirale mit acht Punkten das beste Resultat.

Auch bei den Sonnenblumen und Kiefernzapfen wird diese Auswertungsmethode angewendet. Gesucht ist der Spiraltyp, welcher in Hinsicht auf mehrere Spiralen einer Schar am besten passt. Pro Schar wird für drei natürliche Spiralen eine Rangliste erstellt. Der Spiraltyp, welcher insgesamt die höchste Punktzahl erzielt, passt am besten. Falls mehrere Spiraltypen dieselbe Punktzahl erreichen, „gewinnt“ die Spiralart, deren Verlauf dem der natürlichen Spirale am ähnlichsten ist.

## 4 Resultate

In diesem Kapitel werden die Resultate von jedem Untersuchungsobjekt einzeln vorgestellt. Bei jedem Untersuchungsobjekt haben sich ein oder zwei Spiraltypen von den anderen abgesetzt, während man andere Spiraltypen bald ausschließen konnte.

### 4.1 Schneckenhäuser und Ammoniten

Insgesamt wurden neun Schneckenhäuser von Weinbergschnecken bearbeitet.

Einige Spiraltypen passen aufgrund ihrer Eigenschaften nicht auf die natürliche Spirale und können deshalb ausgeschlossen werden:

Der Lituus und die hyperbolischen Spirale erreichen ihren Pol nie. Deshalb müssen diese Spiraltypen an die äußeren Windungen der natürlichen Spirale angepasst werden. Dies gelingt teilweise, doch der Abstand zu den nächsten Windungen nimmt viel zu schnell ab. Der Lituus und die hyperbolische Spirale umrunden ihren Pol unendlich viele Male, während die natürliche Spirale nur aus fünf Windungen besteht.

Die Windungsabstände der fermatschen Spirale und der Spirale dritten Grades in  $r$  werden mit zunehmendem Polarwinkel immer enger. Außerdem sind sie nahe beim Pol sehr flach, bevor sie sich zu winden beginnen. Auch sie passen nicht auf die Schneckenhausspiralen, deren Windungsabstand mit zunehmender Entfernung vom Pol wächst.

Die Archimedische Spirale passt bei den ersten zwei Windungen meist gut auf die natürliche Spirale und hat dort im Vergleich mit den anderen Spiraltypen oft die kleinste Summe der Radiendifferenzen. Doch von der zweiten Windung an nimmt der Windungsabstand bei den natürlichen Spiralen schneller zu, und die Archimedische Spirale passt mit ihrem konstanten Windungsabstand nicht mehr.

Bei den Schneckenhäusern stechen drei Spiraltypen hervor: die logarithmische Spirale, die Galileische Spirale und die Spirale dritten Grades in  $\phi$ . Nur diese drei Spiraltypen erfüllen die Grundvoraussetzung für ein gutes Resultat: Ihr Radius nimmt mit wachsendem Polarwinkel zu.

Bei den neun untersuchten Schneckenhäusern passt die logarithmische Spirale nur ein Mal, die Galileische drei Mal und

Windung	Radiendifferenz logarithmische Spirale	Punkte	Radiendifferenz Galileische Spirale	Punkte	Radiendifferenz Spirale dritten Grades in $\phi$	Punkte
1	0,76	1	0,39	2	1,30	0
2	1,07	1	0,53	2	1,19	0
3	0,79	0	0,30	2	0,47	1
4	3,89	0	3,49	1	2,35	2
5	10,26	0	5,90	1	3,08	2
<b>Total</b>	<b>16,77</b>	<b>2</b>	<b>10,61</b>	<b>8</b>	<b>8,39</b>	<b>5</b>

Tab. 1: Das Bewertungsschema zur Bestimmung des am besten passenden Spiraltypen bei einem Schneckenhaus.



Abb. 13: Anpassung unterschiedlicher Spiraltypen auf ein Schneckenhaus: Spirale dritten Grades in  $\phi$  (links und mitte), Galileische Spirale (rechts).

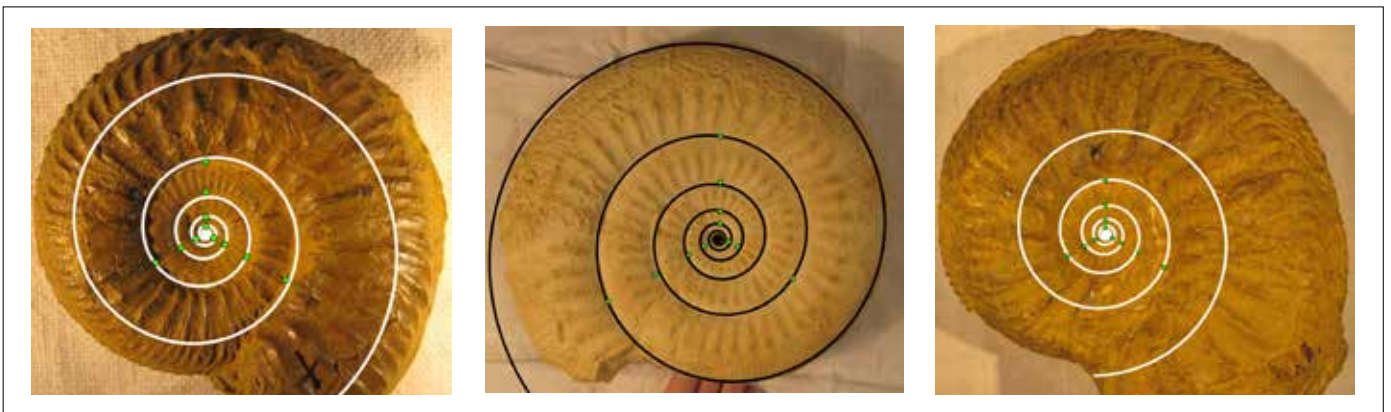


Abb. 14: Anpassung von logarithmischen Spiralen an unterschiedliche Ammoniten (Fotos: Naturhistorisches Museum Basel).

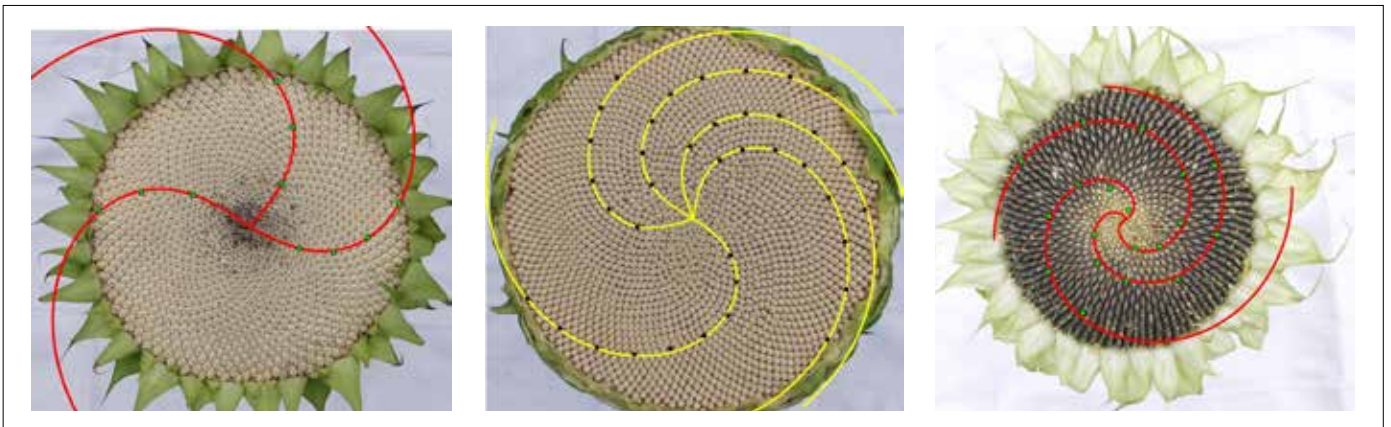


Abb. 16: Fermatsche Spiralen (links und mitte) geben gut die Lage von Sonnenblumenkernen wieder, ebenso wie die Archimedische Spirale (rechts).

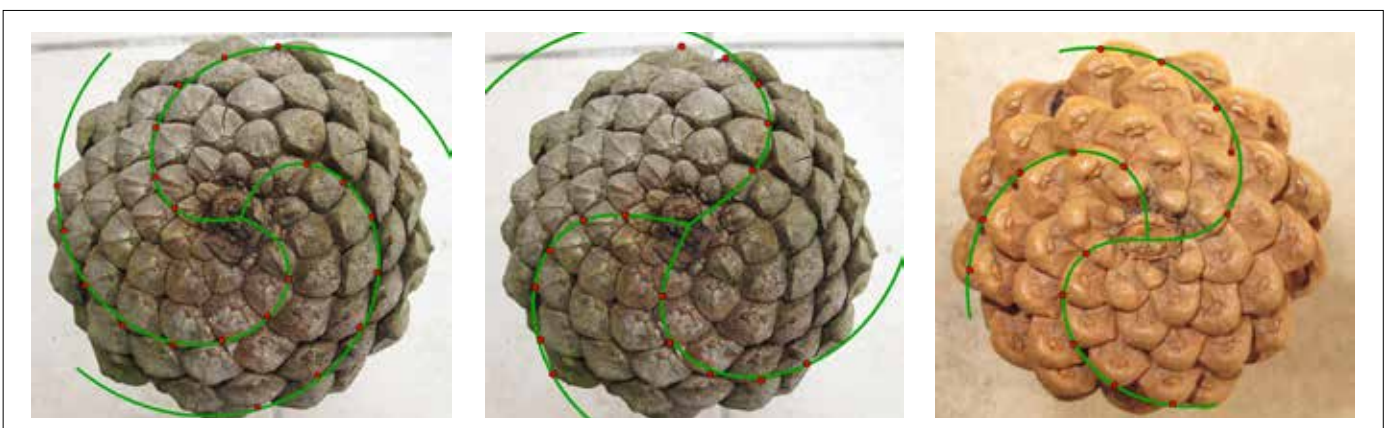


Abb. 17: Anpassung von Fermatschen Spiralen (links und rechts) und der Spirale dritten Grades in  $r$  an Kiefernzapfen.

die Spirale dritten Grades in  $\varphi$  vier Mal am besten auf die natürliche Spirale. Bei einem Schneckenhaus erzielten diese drei Spiraltypen dieselbe Punktzahl.

Die logarithmische Spirale kann meistens auf jede einzelne Windung der natürlichen Spirale gut angepasst werden. Doch sie passt selten auf alle Windungen gleichzeitig.

Zwischen der Galileischen und der Spirale dritten Grades in  $\varphi$  gibt es kaum knappe Entscheidungen. Entweder passt der eine oder der andere Spiraltyp klar am besten. Bei den Spiralen der Schneckenhäuser handelt es sich somit entweder um Spiralen dritten Grades in  $\varphi$  oder um Galileische Spiralen (vgl. Abb. 13).

### 4.2 Ammoniten und Nautilus

Bei den Ammoniten kommen wiederum die drei Typen logarithmische Spirale, Galileische Spirale und Spirale dritten Grades in  $\varphi$  in Frage. Doch nur der Radius der logarithmischen Spirale, der exponentiell zunimmt, wächst gleich an wie jener der natürlichen Spiralen. Alle drei Ammoniten zeigen logarithmische Spiralen (vgl. Abb. 14).

Die Spiralen in Abb. 14 scheinen bei der äußersten Windung der natürlichen Spirale nicht zu passen. Doch an der Stelle, bei welcher die Schale endet, sieht man, dass die neu hinzukommenden Schalteile die älteren etwas überlappt. Es kann also durchaus sein, dass die logarithmische Spirale auch dort den richtigen Verlauf zeigt.

Wie auf Abbildung 15 zu sehen ist, liefert die Schale des Nautilus das eindeutigste Resultat. Die Übereinstimmung mit der logarithmischen Spirale ist verblüffend genau.

### 4.3 Sonnenblumen

Bei fünf Sonnenblumen wurden jeweils drei Spiralscharen untersucht. Während des Prozesses des Anpassens wurde klar, dass einige Spiraltypen nicht auf die natürlichen Spiralen passen:

Der Lituus und die hyperbolische Spirale unterscheiden sich in einer wichtigen Eigenschaft von den Spiralen der Sonnenblumen. Die natürlichen Spiralen beginnen in ihrem Pol, während der Pol der beiden genannten Spiraltypen ein asymptotischer Punkt ist. Versucht man den Lituus oder die

hyperbolische Spirale auf die natürliche Spirale anzupassen, so liegen unendlich viele Windungen auf der Kernfläche. Bei den Spiralen der Sonnenblumen handelt es sich weder um hyperbolische Spiralen noch um den Lituus. Der Pol der logarithmischen Spirale ist ebenfalls ein asymptotischer Punkt. Doch durch das Einsetzen von großen Werten für  $b$  nimmt der Windungsabstand so schnell zu, dass es so aussieht, als ob die erste Windung direkt vom Pol weg läuft. So kann die logarithmische Spirale auf steile Spiralen angepasst werden. Doch ihre Krümmung stimmt nicht mit jener der natürlichen Spiralen überein.

Die Galileische Spirale passt bei einigen natürlichen Spiralen in der Nähe des Pols gut. Doch mit wachsendem Polarwinkel nimmt ihr Radius schneller zu als jener der natürlichen. Bei der Spirale dritten Grades in  $\varphi$  ist dieses Verhalten sogar noch stärker zu beobachten.

Von insgesamt 15 Scharen passt sechs Mal eine Archimedische Spirale am besten, sechs Mal eine Fermatsche, ein Mal eine Spirale dritten Grades in  $r$  und zwei Mal passen eine Archimedische und eine Fermatsche Spirale gleich gut. Diese drei Spiraltypen beginnen alle in ihrem Pol, zeigen also ein sonnenblumenähnliches Wachstum (vgl. Abb. 16). Die Fermatsche und die Spirale dritten Grades in  $r$  machen außerdem einen speziellen Bogen in der ersten Windung, welcher gut auf die natürlichen Spiralen passt.

### 4.4 Kiefernzapfen

Anhand von zwei Kiefernzapfen wurden je drei Spiralscharen untersucht. Zwei davon waren Spiralen dritten Grades in  $r$ , vier waren Fermatsche Spiralen (vgl. Abb. 17). Auch bei den untersuchten Pflanzenteilen gibt es somit erstaunlich exakte Übereinstimmungen.

## 5 Diskussion

### 5.1 Vergleich der Resultate mit der biologischen Theorie

Aus biologischer Sicht eignet sich vor

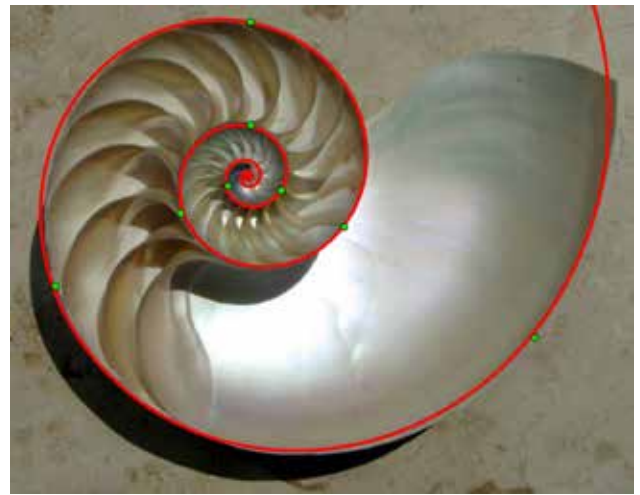


Abb. 15: Die logarithmische Spirale lässt sich sehr gut an einen Nautilus anpassen [6].

allem die logarithmische Spirale zum Bau von Gehäusen und zur Anordnung von Kernen. Doch diese Theorie wird nur durch zwei der fünf Untersuchungsobjekte bestätigt.

Während es sich bei allen untersuchten Ammoniten und der Nautiluschale um logarithmische Spiralen handelt, kann dieser Spiraltyp bei den meisten Schneckenhäusern ausgeschlossen werden. Eine Ursache für diesen Sachverhalt könnte die unterschiedliche Belastung der Gehäuse in Wasser und an Land sein. Während die Gehäuse der Schnecken der Schwerkraft und dem Luftdruck ausgesetzt sind, wirken auf die Gehäuse der Ammoniten und der Nautilus im Wasser zusätzliche Kräfte wie der Auftrieb und der Wasserdruck. Eine weitere Begründung sind die unterschiedlichen Anforderungen, welche die beiden Lebensräume an ein Gehäuse stellen. Für den Nautilus spielt das Gehäuse eine wichtige Rolle bei der Fortbewegung. Dank der logarithmischen Spirale ist sein Gehäuse stromlinienförmig. Dies verringert den Wasserwiderstand und so auch den Energieverbrauch. Ähnliches gilt auch für die Ammoniten. Bei der Fortbewegung von Schnecken hat das Gehäuse jedoch keine primäre Rolle.

Bei Pflanzen führt aus mathematischer Sicht jede feste Blattstellung, also jeder konstante Divergenzwinkel, bei exponentiellem Wachstum zu logarithmischen Spiralen. Die dazu widersprüchlichen Resultate der Untersuchungen lassen vermuten, dass exponentielles Wachstum eine schlechte Näherung für das Wachstum der Fruchtstände von

Sonnenblumen und Kiefernzapfen ist, oder dass der Konvergenzwinkel nicht genügend konstant ist.

Die hier aufgeführten Erklärungen sind nur Vermutungen und müssten selbstverständlich noch ausführlich erforscht werden.

## 5.2 Fehlerquellen

Wie bereits erwähnt, untersucht diese Arbeit das dreidimensionale Phänomen der Schraubenlinien in der Natur nur zweidimensional. Durch die Fotografie wird der dreidimensionale Windungsabstand auf eine Ebene projiziert. Das Verhältnis zwischen den Windungsabständen bleibt dabei erhalten. Dadurch hat die Spirale auf der Fotografie denselben „Charakter“ wie die Schraubenlinie und die Aussagen über die zweidimensionale Spirale treffen somit auch auf die Schraubenlinie zu. Dabei muss jedoch bedacht werden, dass beim Fotografieren bereits eine kleine Abweichung von der Richtung der Achse des Objekts zu einer Verfälschung des Resultats führt. Daher wurde versucht, die Objekte möglichst senkrecht zu ihrer Achse zu fotografieren, doch leichte Abweichungen können nicht ausgeschlossen werden.

Auch die Mess- und Auswertungsmethode sind mit Fehlern behaftet: Das Einstellen der Parameterwerte von Auge führt zu guten Übereinstimmungen, doch es gibt keine Garantie, dass die optimalen Einstellungen gefunden wurden. Unter Ausnutzung der Eigenschaft, dass bei der logarithmischen Spirale Radien in gleichen Winkelabständen eine geometrische Folge bilden, wurde versucht den Parameter  $b$  zu berechnen. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass die Berechnung eines Parameters mit einem großen Zeitaufwand verbunden ist und kaum zu einem besseren Ergebnis führt als von Hand eingestellte Parameterwerte. Um rechnerisch die optimalen Parameterwerte zu finden, müsste mit einer anderen Software gearbeitet werden. GeoGebra eignet sich für

diesen Zweck nicht. Bei den Sonnenblumen und Kiefernzapfen stellt die Annahme, dass der Pol der Spirale im Mittelpunkt der Blume liegt außerdem einen Widerspruch zur Motivation der Arbeit dar, da diese Hypothese auf biologischen Überlegungen basiert. Da die Pflanzen nicht exakt kreisförmige Fruchtstände haben, stellt auch das Setzen des Mittelpunkts der Pflanze eine Fehlerquelle dar.

Die Auswertungsmethode basiert auf lediglich drei Messungen pro Windung (bzw. einigen Messungen pro Spiralanfang) und das Urteil nach Punktsumme bringt eine der Problematik nicht angemessene Gewichtung ins Spiel. Um ein aussagekräftigeres Resultat zu erhalten, müssten mehr Messdaten gesammelt werden. Anstatt einzelne Radiendifferenzen miteinander zu vergleichen, könnte auch die Fläche zwischen der natürlichen und der mathematischen Spirale minimiert, gemessen und verglichen werden. Abermals ist dies mit Geogebra nicht möglich.

Da der Zeitaufwand für die Bearbeitung eines Fotos sehr groß ist, konnte pro Untersuchungsobjekt nur eine begrenzte Anzahl bearbeitet werden. Die Resultate der Messungen können deshalb nicht verallgemeinert werden, geben jedoch trotzdem einen spannenden Einblick in die Spiralbildung der Pflanzen- und Tierwelt. Beim Betrachten der Resultate sollte man außerdem bedenken, dass die natürlichen Spiralen nur auf eine Auswahl von acht mathematischen Spiraltypen untersucht wurden. Es gibt noch unzählige weitere mathematische Spiraltypen.

## 6 Schlussfolgerungen

Die Untersuchungen zeigen, dass bei Schneckenhäusern, Ammoniten, Nautiluschalen, Sonnenblumen und Kiefernzapfen nahezu mathematische Spiralen auftreten. Die teilweise exakte Übereinstimmung der Spiraltypen mit den natürlichen Spiralen ist verblüffend. Daraus kann der Schluss gezogen werden, dass

die mathematischen Spiralen den Pflanzen und Tieren einen Vorteil verschaffen, den andere Kurven oder Formen ihnen nicht bieten können. Dabei fällt auf, dass die hyperbolische Spirale und der Lituus bei keinem einzigen Untersuchungsobjekt auf die Spirale passen. Ihr Wachstum ist jenem der Pflanzen und Gehäuse entgegengesetzt. Während sich alle Untersuchungsobjekte beim Wachstum vergrößern, nimmt der Radius dieser Spiraltypen mit wachsendem Polarwinkel ab. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die hyperbolische Spirale und der Lituus in der Natur nirgends anzutreffen sind. Möglicherweise sind sie bei Farnen oder anderen Pflanzen, die sich einrollen, zu finden. Beim Betrachten aller Resultate fällt außerdem auf, dass kein Spiraltyp sowohl bei einem tierischen als auch bei einem pflanzlichen Untersuchungsobjekt gut passt. Die Art der Spirale scheint mit dem Wachstum zusammen zu hängen, denn darin unterscheiden sich die beiden Objektgruppen. Die Gehäuse der Weichtiere werden nur an ihrem Ende vergrößert, während die Pflanzen ihre Kernen oder Schuppen mithilfe ihres Divergenzwinkels um die erste Anlage herum platzieren. Schließlich bietet die vorgelegte Methode einen Ansatz, die in der Natur vorkommenden Spiralen zu klassifizieren. Die Übereinstimmung der Resultate mit den biologischen Überlegungen zur Spiralbildung ist jedoch nicht so groß wie erwartet. Dies liegt zum einen an der noch nicht ausgereiften Methode, bietet aber auch einen Hinweis an die Biologen, ihre Argumente zu überdenken.

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Johanna Heitzer für die konstruktive Kritik bedanken. Vielen Dank auch an Schweizer Jugend Forscht. Der nationale Wettbewerb war eine spannende Erfahrung und hat viele Türen geöffnet. Ein besonderes Dankeschön gebührt auch meinen Eltern und meinem Freund, die mir immer tatkräftig zur Seite standen.

## Quellenverzeichnis

- [1] Hartmann, Hans und Mislin, Hans (1985): Die Spirale im menschlichen Leben und in der Natur eine interdisziplinäre Schau. Basel, Gewerbemuseum, Museum für Gestaltung, MG-Edition.
- [2] Heitzer, Johanna (1998): Spiralen ein Kapitel phänomenaler Mathematik. Leipzig, Ernst Klett Schulbuchverlag.
- [3] Thompson, D'Arcy Wentworth (2006): Über Wachstum und Form. Frankfurt am Main, Eichborn Verlag.
- [4] Bindel, Ernst (1954): Logarithmen für Jedermann, elementare Einführung mit Hinweisen auf höhere Gesetzmäßigkeiten. Stuttgart, Verlag freies Geistesleben.
- [5] GeoGebra Hilfe, C:\Program Files (x86)\GeoGebra\docude\index.html, 2.4.2010, siehe „Was ist GeoGebra?“
- [6] <http://de.academic.ru/dic.nsf/dewiki/1092365>